OPTIMIZACIÓN

Herramientas de Modelación Matemática y Optimización para la Toma de Decisiones

Conceptos · Modelado · Aplicación en la Industria Forestal · Pyomo

Gabriela Corsano | F.I.Q. (U.N.L.) | INGAR CONICET-UTN |

Nicolás Vanzetti | F.I.Q. (U.N.L.) | INGAR CONICET-UTN |

Agenda del Curso

01

Conceptos Fundamentales

¿Qué es MILP? Variables, restricciones, función objetivo

02

Técnicas de Modelado

Linealización de bilinealidades, variables enteras

03

Relaciones Lógicas

Programación disyuntiva, Basic Steps, operadores AND/OR/→

04

Caso de Estudio

Selección de proveedores de biomasa forestal (MILP táctico)

05

Implementación en Pyomo

Codificación del modelo, resolución y análisis de resultados

MÓDULO 01

Conceptos Fundamentales

¿Qué es un modelo MILP y por qué importa?

¿Qué es un Modelo MILP?

Definición

Un modelo MILP (Mixed Integer Linear Program) es una formulación matemática con una **función objetivo lineal** sujeta a **restricciones lineales**, donde las variables pueden tomar valores continuos, enteros o binarios.

Estructura General

$$\min / \max \quad c^T x + d^T y$$

$$\text{s.a.} \quad Ax + By \leq b$$

$$x \geq 0 \quad \text{(continuas)}$$

$$y \in \{0,1\} \text{ o } \mathbb{Z} \quad \text{(enteras)}$$

Tipos de Variables

Continuas ($x \in \mathbb{R}^+$)

Flujos, cantidades, costos

Enteras ($y \in \mathbb{Z}^+$)

Número de unidades, lotes

Binarias ($y \in \{0,1\}$)

Decisiones sí/no: instalar, seleccionar, activar

¿Por qué MILP?

Porque nos permite traducir decisiones complejas del mundo real a un modelo matemático que mediante un método se puede resolver, manteniendo realismo, flexibilidad y garantías de optimalidad.

Componentes de un Modelo de Optimización

Variables de Decisión

Incógnitas del modelo: pueden ser continuas, enteras o binarias.

Es la respuesta que se quiere obtener.

Función Objetivo

Expresión matemática que cuantifica el criterio de decisión.

Es lo que se desea minimizar o maximizar.

Restricciones

Ecuaciones/inecuaciones que representan “las reglas” del problema (límites físicos, operativos, lógicos o de recursos disponibles).

Parámetros (Datos)

Valores conocidos del problema: costos, capacidades, demandas, distancias, eficiencias. Definen la instancia concreta.

Conjuntos e Índices

Definen la estructura del modelo: proveedores i, clientes j, períodos t. Permiten escribir el modelo en forma compacta (en bloque).

Región Factible

El espacio de todas las decisiones válidas (intersección de todas las restricciones)

Ejemplo: Localización de Plantas (Facility Location)

Problema:

Decidir cuáles de *n* plantas instalar para satisfacer la demanda de *m* clientes al menor costo total.

Conjuntos:

i: plantas, i = 1, …, *n*
j: clientes, j= 1, …, m

Datos (parámetros):

c_{ij}: costo unitario de transporte
f_i: costo fijo de instalación de una planta
A_i: capacidad de producción de la plantas i (en unidades)
D_j: demanda del clientes j (en unidades)

Variables de decisión

x_{ij} : cant. enviada de planta i a cliente j (unidades)

y_i : 1 si se instala la planta i

💡 **Clave:**
La restricción $\Sigma_j x_{ij} \leq a_i y_i$ vincula las variable x_{ij} e y_i.
Si $y_i = 0$ (planta no instalada), entonces $x_{ij} = 0$ automáticamente: no se puede enviar nada desde allí.

Modelo MILP:

$$\text{Min} \quad \Sigma_i \Sigma_j c_{ij} x_{ij} + \Sigma_i f_i y_i$$

$$\text{s.a.} \quad \Sigma_i x_{ij} \geq D_j \quad \forall j \quad \text{(demanda)}$$

$$\Sigma_j x_{ij} \leq A_i y_i \quad \forall i \quad \text{(capacidad)}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+, \; y_i \in \{0,1\}$$

MÓDULO 02

Técnicas de Modelado

Herramientas para convertir No Lineal → Lineal

Conversión de Variables Enteras a Binarias

Enfoque 1 — Representación unitaria (one-hot)

Para $0 \leq n \leq N$, $n = \sum_{k=0}^{N} k\, y_k$ con $\sum_{k=0}^{N} y_k = 1$, $y_k \in \{0,1\}$

Un único y_k vale 1; los demás son 0.
Útil cuando n toma valores de un conjunto discreto conocido.

Enfoque 2 — Representación binaria (compacta)

Para $0 \leq n \leq N$, $n = \Sigma_{k=0}^{M} 2^k \cdot y_k$ con $2^M \leq N \leq 2^{M+1}$

Ejemplo:

Se debe seleccionar el tamaño de un cierto equipo de un conjunto conocido de posibles tamaños:

$VF = \{VF_1, VF_2, \ldots, VF_n\}$

$x = \Sigma_i VF_i\, y_i$
$\Sigma_i y_i = 1$
$y_i \in \{0,1\}$

Ejemplo:

Max $z = x_1 + 2x_2$
s.a: $x_1 \leq 5$
$2x_1 + 3x_2 \leq 30$,
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+$

$x_1 = 0$
$x_2 = 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 10$
$z^* = 20$

Solución óptima: $y_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$,
$z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 1$.

$x_1 \leq 5 \rightarrow 2^2 \leq 5 \leq 2^3 \rightarrow x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3$ (3 binarias)

$x_2 \leq 10 \rightarrow 2^3 \leq 10 \leq 2^4 \rightarrow x_2 = z_1 + 2z_2 + 4z_3 + 8z_4$ (4 binarias)

$$Max\ z = y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2z_1 + 4z_2 + 8z_3 + 16z_4$$

S.a.: $y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5$
$2y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 3z_1 + 6z_2 + 12z_3 + 24z_4 \leq 30$
$y_i, z_i \in \{0,1\}$

Bilinealidades: Producto de Dos Variables Binarias

⚠ Si x_1 y x_2 son variables binarias, el producto $x_1 \cdot x_2$ es NO LINEAL → no se puede optimizar directamente usando MILP

Solución: Introducir variable auxiliar $w = x_1 \cdot x_2$

$$w \leq x_1$$

w no puede ser 1 si x_1 es 0

$$w \leq x_2$$

w no puede ser 1 si x_2 es 0

$$w \geq x_1 + x_2 - 1$$

w debe ser 1 cuando ambas son 1

con $w \in [0,1]$ continua (no necesita ser entera por la estructura del problema)

Verificación

x_1	x_2	$w = x_1 \cdot x_2$	Restricciones satisfechas?
0	0	0 ✓	$w \leq 0$, $w \leq 0$, $w \geq -1$ → $w=0$
1	0	0 ✓	$w \leq 1$, $w \leq 0$, $w \geq 0$ → $w=0$
0	1	0 ✓	$w \leq 0$, $w \leq 1$, $w \geq 0$ → $w=0$
1	1	1 ✓	$w \leq 1$, $w \leq 1$, $w \geq 1$ → $w=1$

💡 **Pensar:**

¿Caso $x \cdot y$ con $0 \leq x \leq N$ $y \in \{0,1\}$?

Bilinealidades: Producto Binaria × Continua

Si $x \in [0, u]$ (continua) e $y \in \{0,1\}$ (binaria), el producto $x \cdot y$ es NO LINEAL

Solución: Variable auxiliar $z = x \cdot y$ definida por las siguientes restricciones lineales:

$z \leq u \cdot y$ — z = 0 cuando y = 0

$z \leq x$ — z no supera x

$z \geq x - u(1-y)$ — z = x cuando y = 1

$z \geq 0$ — z es no negativa

Ejemplo

Si se usa la tubería de capacidad L, el flujo Q puede circular:
Q: caudal del flujo (l)
y = 1 si se conecta la tubería

$z \leq L \cdot y$
$z \leq Q$
$z \geq Q - L \cdot (1 - y)$
$z \geq 0,\ Q \geq 0,\ y \in \{0,1\}$

Verificación

Caso y = 0

$z \leq 0,\ z \leq x,\ z \geq x-u,\ z \geq 0 \rightarrow z = 0$ ✓

Caso y = 1

$z \leq u,\ z \leq x,\ z \geq x,\ z \geq 0 \rightarrow z = x$ ✓

MÓDULO 03

Programación Lógica Disyuntiva

Modelar relaciones lógicas con variables binarias

Operadores Lógicos → Restricciones Lineales

NEGACIÓN (¬ ; ~)	Proposición lógica: $\neg P$	Restricción lineal equivalente: $1 - y \geq 1$ Si P es verdadera, no P es falsa
OR (V)	Proposición lógica: $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_m$	Restricción lineal equivalente: $y_1 + y_2 + \ldots + y_m \geq 1$ Al menos una proposición es verdadera
AND (Λ)	Proposición lógica: $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m$	Restricción lineal equivalente: $y_1 \geq 1 , \quad y_2 \geq 1 , \quad \ldots , \quad y_m \geq 1$ Todas las proposiciones son verdaderas
IMPLICACIÓN (⇒)	Proposición lógica: $P_1 \Rightarrow P_2$	Restricción lineal equivalente: $y_2 \geq y_1$ Si P_1 es verdadero, P_2 también debe serlo
BICONDICIONAL (⇔)	Proposición lógica: $P_1 \Leftrightarrow P_2$	Restricción lineal equivalente: $y_1 = y_2$ P_1 y P_2 tienen el mismo valor de verdad

Condiciones Lógicas sobre Restricciones → Representación Algebraica

NEGACIÓN (¬ ; ~)	$\neg\,(f(x) > 0\,)$	$f(x) \le 0$
OR (V)	$g(x) \le 0 \;\vee\; f(x) \le 0$	$g(x) \le M\,y \quad (M \gg 0)$ $f(x) \le M\,(1 - y)$ $y \in \{0, 1\}$
AND (Λ)	$g(x) \le 0 \wedge f(x) \le 0$	$g(x) \le 0$ $f(x) \le 0$
IMPLICACIÓN (⇒)	$g(x) > 0 \Rightarrow f(x) \le 0$	$g(x) \le M\,y \quad (M \gg 0)$ $f(x) \le M\,(1 - y)$ $y \in \{0, 1\}$

Procedimiento Sistemático: Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Objetivo: convertir cualquier proposición lógica compuesta $\mathbf{Q_i = (P_1 \lor P_2 \lor \dots \lor P_n)}$ en una conjunción de disyunciones $\mathbf{Q_1 \land Q_2 \land \dots \land Q_k}$ para luego traducirse directamente en una desigualdad lineal.

Paso 1

Eliminar implicaciones

$P_1 \Rightarrow P_2 \quad \rightarrow \quad \neg P_1 \lor P_2$

Reemplazar toda $\Rightarrow$ por su disyunción equivalente.

Paso 2

Aplicar Leyes de De Morgan

$\neg(P_1 \land P_2) = \neg P_1 \lor \neg P_2$

$\neg(P_1 \lor P_2) = \neg P_1 \land \neg P_2$

Distribuir las negaciones con su forma equivalente.

Paso 3

Distributividad del OR sobre AND

$(P_1 \land P_2) \lor P_3 = (P_1 \lor P_3) \land (P_2 \lor P_3)$

$P_1 \lor (P_2 \land P_3) = (P_1 \lor P_3) \land (P_1 \lor P_3)$

Aplicar hasta obtener solo disyunciones como cláusulas.

Ejemplo: Basic Steps Aplicado

"Si se produce cerveza rubia o roja, debe usarse el fermentador A o el fermentador B"

Variables:

P_1: produce cerveza rubia (y_1); P_2: produce cerveza roja (y_2); P_3: se usa el fermentador A (y_3) P_4: se usa el fermentador B (y_4)

Proposición: $(P_1 \vee P_2) \Rightarrow (P_3 \vee P_4)$

Paso 1 – Eliminar ⇒: $\neg(P_1 \vee P_2) \vee (P_3 \vee P_4)$

Paso 2 – De Morgan: $(\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee (P_3 \vee P_4)$

Paso 3 – Distributiva: $(\neg P_1 \vee P_3 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_3 \vee P_4)$

Q_1 Q_2

Restricciones lineales resultantes:

$Q_1: \quad (1-y_1) + y_3 + y_4 \geq 1 \quad \rightarrow \quad y_3 + y_4 \geq y_1$

$Q_2: \quad (1-y_2) + y_3 + y_4 \geq 1 \quad \rightarrow \quad y_3 + y_4 \geq y_2$

Ejercicio Integrador

Se tienen 3 clientes con demandas D_j unidades de cierto producto j= 1, 2, 3. Los productos pueden proceder de dos proveedores que disponen de A_i unidades, i= 1, 2. Sean c_{ij} los costos unitarios de transporte. Modelar el problema que determine la entrega óptima, considerando que:

i) Si las unidades totales provistas por el proveedor 1 son menores a K, se tiene un costo fijo de CK.

ii) Si el proveedor 1 entrega más de Q1 unidades, el proveedor 2 debe al menos distribuir Q2 unidades.

iii) Cada proveedor puede entregar sus unidades en contenedores de tamaño V_1, V_2, V_3 o V_4, con costos $(120\ V_p^{0,6})$, p = 1,.., 4.

Ejercicio Integrador

Se tienen 3 clientes con demandas D_j unidades de cierto producto j= 1, 2, 3. Los productos pueden proceder de dos proveedores que disponen de A_i unidades, i= 1, 2. Sean c_{ij} los costos unitarios de transporte. Modelar el problema que determine la entrega óptima, considerando que:

i) Si las unidades totales provistas por el proveedor 1 son menores a K, se tiene un costo fijo de CK.

ii) Si el proveedor 1 entrega más de Q1 unidades, el proveedor 2 debe al menos distribuir Q2 unidades.

iii) Cada proveedor puede entregar sus unidades en contenedores de tamaño V_1, V_2, V_3 o V_4, con costos $(120\ V_p^{0,6})$, p = 1,.., 4.

Solución:

Sea x_{ij}: unidades transportadas desde proveedor i a cliente j

y_i= 1 si se usa el proveedor i

$w = 1$ si el proveedor 1 entrega al menos K unidades

$$Min \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} + CK\ (1 - w)$$

Suj. a: $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq A_i y_i\ , \quad i = 1, 2$

$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \geq D_j\ , \quad j = 1, 2, 3$

$$Kw \leq \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq K + (A_1 - K)w$$

💡 Pensar:

Que no pague si no se elige proveedor 1

Ejercicio Integrador

Se tienen 3 clientes con demandas D_j unidades de cierto producto j= 1, 2, 3. Los productos pueden proceder de dos proveedores que disponen de A_i unidades, i= 1, 2. Sean c_{ij} los costos unitarios de transporte. Modelar el problema que determine la entrega óptima, considerando que:

i) Si las unidades totales provistas por el proveedor 1 son menores a K, se tiene un costo fijo de CK.

ii) Si el proveedor 1 entrega más de Q1 unidades, el proveedor 2 debe al menos distribuir Q2 unidades.

iii) Cada proveedor puede entregar sus unidades en contenedores de tamaño V_1, V_2, V_3 o V_4, con costos $(120\, V_p^{0,6})$, p = 1,.., 4.

Solución:

Sea x_{ij}: unidades transportadas desde proveedor i a cliente j

y_i= 1 si se usa el proveedor i

$w = 1$ si el proveedor 1 entrega al menos de K unidades

$z = 1$ si el proveedor 2 entrega al menos Q2 unidades

$$Min \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} + CK\,(1-w)$$

Suj. a:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le A_i y_i\,, \quad i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \ge D_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$Kw \le \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \le K + (A_1 - K)w$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} - Q1 \le Mz$$

$$Q2 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \le M(1-z)$$

Ejercicio Integrador

Se tienen 3 clientes con demandas D_j unidades de cierto producto j= 1, 2, 3. Los productos pueden proceder de dos proveedores que disponen de A_i unidades, i= 1, 2. Sean c_{ij} los costos unitarios de transporte. Modelar el problema que determine la entrega óptima, considerando que:

i) Si las unidades totales provistas por el proveedor 1 son menores a K, se tiene un costo fijo de CK.

ii) Si el proveedor 1 entrega más de Q1 unidades, el proveedor 2 debe al menos distribuir Q2 unidades.

iii) Cada proveedor puede entregar sus unidades en contenedores de tamaño V_1, V_2, V_3 o V_4, con costos $(120\, V_p^{0,6}$,(p = 1,.., 4.

Solución:

Sea x_{ij}: unidades transportadas desde proveedor i a cliente j

y_i= 1 si se usa el proveedor i

w = 1 si el proveedor 1 entrega menos de K unidades

z = 1 si el proveedor 2 entrega al menos Q2 unidades

s_{ip} = 1 si el proveedor i entrega usando contenedor de tamaño V_s

$$Min \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} + CK\,(1-w) + 120\sum_{i,p} V_p^{0,6} s_{ip}$$

Suj. a:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le A_i y_i\,, \quad i = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \ge D_j\,, \quad j = 1,2,3$$

$$Kw \le \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \le K + (A_1 - K)w$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} - Q1 \le Mz$$

$$Q2 - \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \le M(1-z)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le \sum_{p} V_p\ s_{ip}, \qquad i = 1,2$$

$$\sum_{p} s_{ip} \le y_i, \qquad i = 1,2$$

MÓDULO 04

Caso de Estudio: Industria Forestal

Planificación táctica del abastecimiento de biomasa para una planta de energía eléctrica

Contexto del Problema

Descripción

Una planta de generación de energía eléctrica ubicada en el NEA (noreste argentino) requiere biomasa forestal como combustible. Debe gestionar el abastecimiento de múltiples proveedores a lo largo del año.

Fuentes de suministros	Bosques y aserraderos
Tipos de biomasa	Troncos, chips y aserrín
Horizonte temporal	1 año dividido en 12 períodos mensuales
Demanda	Conocida y determinística para cada mes
Restricciones de mezcla de la	Cantidades mínimas y máximas de cada tipo de biomasa en la mezcla
Herramienta	Modelo MILP resuelto con Pyomo

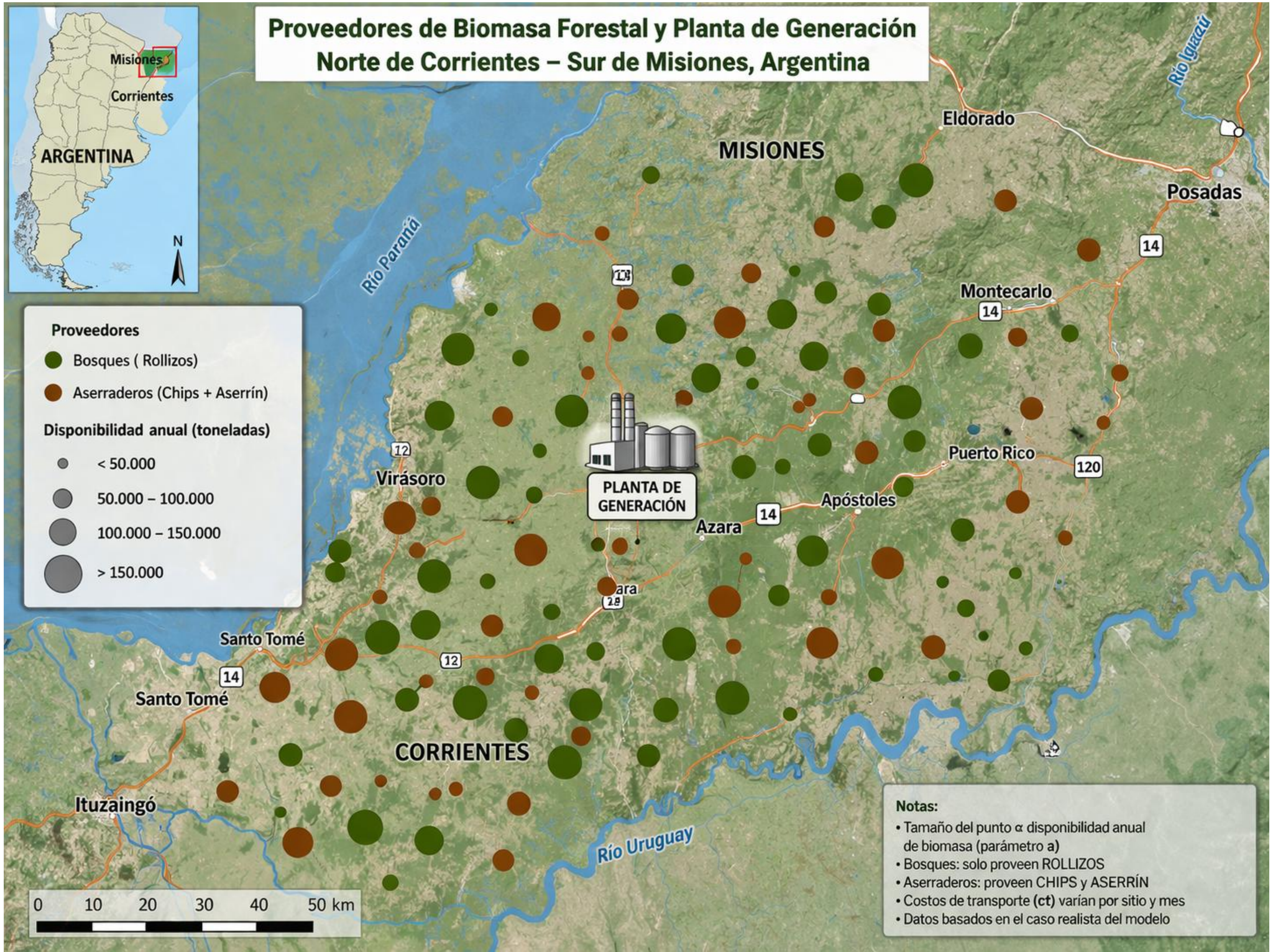
Objetivos del Modelo

1. Seleccionar qué proveedores contratar cada mes
2. Determinar los volúmenes a adquirir por sitio
3. Gestionar el inventario de biomasa en planta
4. Minimizar el costo total de abastecimiento

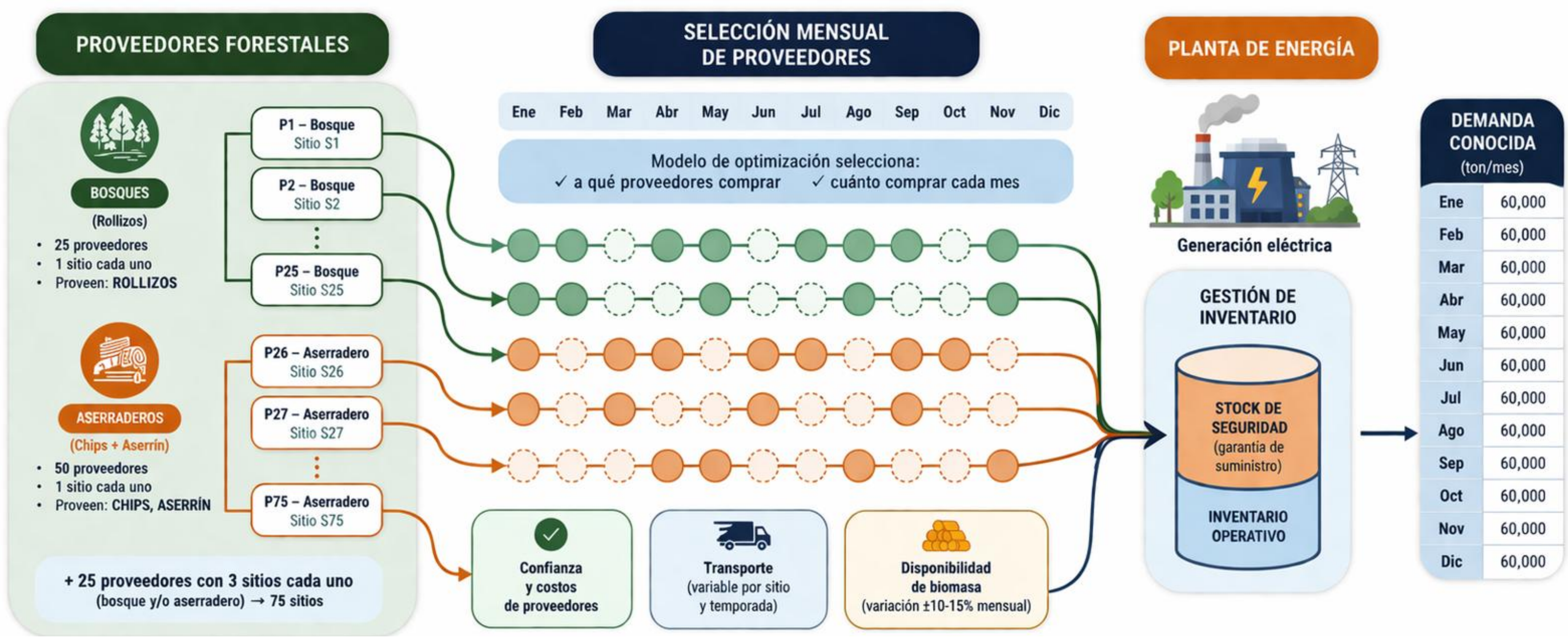
Supuestos clave

- Inventario mínimo y máximo en planta
- Confiabilidad del proveedor pondera costo activación
- Costos de compra, transporte e inventario
- Requerimientos de mezcla por tipo de biomasa

Contexto del Problema



Contexto del Problema



Componentes del Modelo de Optimización

Variables de Decisión

Incógnitas del modelo: pueden ser continuas, enteras o binarias.

Es la respuesta que se quiere obtener.

Función Objetivo

Expresión matemática que cuantifica el criterio de decisión.

Es lo que se desea minimizar o maximizar.

Restricciones

Ecuaciones/inecuaciones que representan "las reglas" del problema (límites físicos, operativos, lógicos o de recursos disponibles).

Parámetros (Datos)

Valores conocidos del problema: costos, capacidades, demandas, distancias, eficiencias. Definen la instancia concreta.

Conjuntos e Índices

Definen la estructura del modelo: proveedores i, clientes j, períodos t. Permiten escribir el modelo en forma compacta (en bloque).

Región Factible

El espacio de todas las decisiones válidas (intersección de todas las restricciones)

Componentes del Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO

Conjuntos e Índices

$p \in P$	Proveedores de biomasa
$s \in S$	Sitios de suministro
$S_p \subseteq S$	Sitios pertenecientes al proveedor p
$b \in B$	Tipos de biomasa
$t \in T$	Períodos de tiempo

Parámetros (Datos)

a_{sbt}	Disponibilidad máxima de biomasa
d_t	Demanda de biomasa
$\alpha_b^{min}, \alpha_b^{max}$	Proporciones min. y max. de mezcla
I^{min}, I^{max}	Inventario min. y max.
I_0	Inventario inicial
$\gamma_p \in [0,1]$	Nivel de confiabilidad
c_{sbt}^{v}	Costo unitario de compra
c_{st}^{t}	Costo unitario de transporte
c_t^{inv}	Costo unitario de inventario
c_p^{f}	C. fijo de activación del proveedor

Variables de Decisión

x_{sbt}	Cantidad de biomasa tipo b adquirida en el sitio $s$en el período t
I_t	Inventario total en planta al final del período t
Q_{pt}	Volumen total recibido del proveedor p en el período t
Q_t	Volumen total recibido en el período t
$y_{pt} \in \{0,1\}$	1 si el proveedor p es activado en el período t; 0 en caso contrario

Componentes de un Modelo de Optimización

Función Objetivo

$$\min Costos\ Totales = \binom{C.Variables}{compra\ y\ transporte} + \binom{C.Fijo}{Activacion\ de\ proveedores} + \binom{Costo}{Inventario}$$

Restricciones

Disponibilidad de Biomasa	Flujo de biomasa	De mezcla
Balance de inventario	Capacidad de Almacenamiento	Activación proveedor-flujo

Componentes de un Modelo de Optimización

Función Objetivo

$$\min Costos\ Totales = \sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{b\in B}(c_{sbt}^{v} + c_{st}^{t})x_{sbt} + \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c_{p}^{f}(1-\gamma_p)y_{pt} + \sum_{t\in T} c_{t}^{inv}\, I_t$$

Restricciones

$$x_{sbt} \le a_{sbt} \sum_{p:s\in S_p} y_{pt} \qquad \forall s,b,t$$

$$Q_{pt} = \sum_{s\in S_p}\sum_{b\in B} x_{sbt} \qquad \forall p,t$$

$$Q_t = \sum_{p\in P} Q_{pt} \qquad \forall t$$

$$\sum_{s\in S} x_{sbt} \ge \alpha_b^{min} Q_t \qquad \forall b,t$$

$$\sum_{s\in S} x_{sbt} \le \alpha_b^{max} Q_t \qquad \forall b,t$$

$$I_1 = I_0 + Q_1 - d_1$$

$$I_t = I_{t-1} + Q_t - d_t \qquad \forall t > 1$$

$$I^{min} \le I_t \le I^{max} \qquad \forall t$$

$$Q_{pt} \le M y_{pt} \qquad \forall p,t$$

Resultados y Análisis

$ 29.297.948,3

COSTO TOLTAL

69

proveedores seleccionados a lo largo del año

< 1 seg

tiempo de resolución (CPU)

8.000+

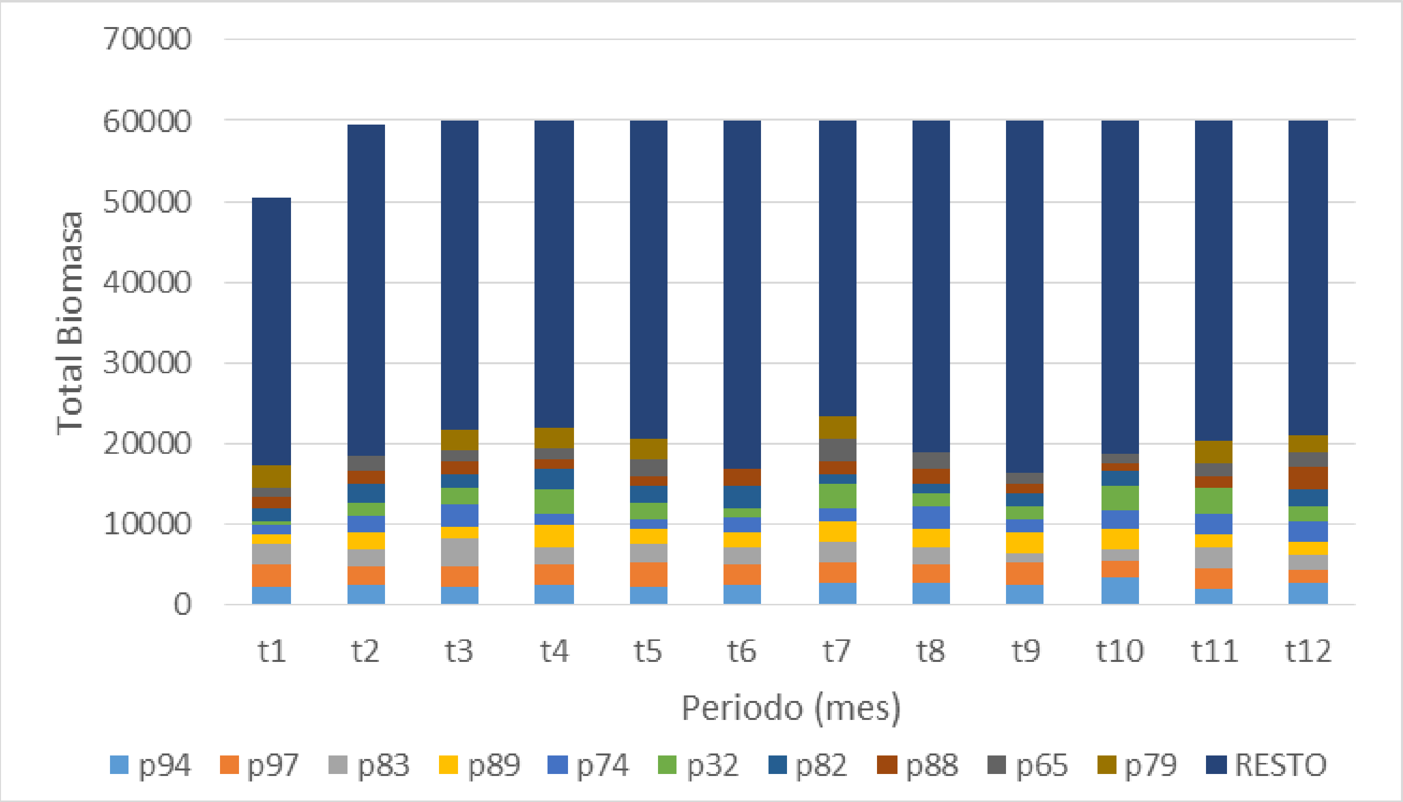
Restricciones en el modelo MILP

7.900+

Variables de decisión

1.200

Variables binarias



MÓDULO 05

Implementación en PYOMO

Codificación del modelo, resolución y análisis de resultados

PYOMO: Optimización desde Python

¿Qué es PYOMO?

Pyomo es una biblioteca de Python diseñada para formular y resolver modelos de optimización matemática, incluyendo programación lineal, entera mixta y no lineal. Permite representar modelos algebraicos mediante sintaxis de Python e integrarse fácilmente con herramientas de análisis de datos y visualización.

Ventajas clave

- Sintaxis algebraica compacta: el modelo se escribe cercano a la notación matemática
- Compatible con múltiples solvers: CPLEX, Gurobi, GLPK, CBC, HiGHS, etc.
- Soporte para MILP, NLP, MIP, MINLP
- Integración total con el ecosistema Python (pandas, NumPy, matplotlib, Google Colab…)
- Fácil lectura de datos desde Excel, CSV y bases de datos

Estructura básica en PYOMO

```
from pyomo.environ import *

# Modelo
model = ConcreteModel()

# Conjuntos
model.i = Set(initialize=["p1","p2"])
model.t = Set(initialize=[1,2,3])

# Parámetros
model.D = Param(model.t, initialize={1:50, 2:40, 3:60})

# Variables
model.x = Var(model.i, model.t, domain=NonNegativeReals)
model.inv = Var(model.t, domain=NonNegativeReals)

# Restricción de balance
def balance_rule(model, t):
if t == 1:
return model.inv[t] == sum(model.x[i,t] for i in model.i) - model.D[t]
return model.inv[t] == model.inv[t-1] + \
sum(model.x[i,t] for i in model.i) - model.D[t]

model.balance = Constraint(model.t, rule=balance_rule)

# Función objetivo
model.obj = Objective(
expr=sum(model.x[i,t] for i in model.i for t in model.t),
sense=minimize
)

# Solver
solver = SolverFactory("highs")
solver.solve(model)
```

PYOMO: Optimización desde Python

1- Abrir el siguiente archivo:

https://bit.ly/modelobiomasa

2- Hacer una copia!!!

3- Descargar el siguiente Archivo

https://bit.ly/Datos_Biomasa

MÓDULO 06

Caso de Estudio: Nuevas condiciones

Codificación del modelo, resolución y análisis de resultados

Contexto del Problema: Nuevas condiciones

Manteniendo los parámetros del modelo original, evaluar los flujos de biomasa y los costos asociados al considerar, de manera individual, las siguientes condiciones adicionales:

a) Todos los proveedores deben ser seleccionados al menos una vez a lo largo del horizonte de planificación.

b) Si un proveedor es seleccionado, debe permanecer activo durante un mínimo de L_p^{min} períodos consecutivos.

c) Se prohíbe la elección de proveedores cuya distancia sea mayor o igual a $Dist^{max}$

Contexto del Problema: Nuevas condiciones

Manteniendo los parámetros del modelo original, evaluar los flujos de biomasa y los costos asociados al considerar, de manera individual, las siguientes condiciones adicionales:

a) **Todos los proveedores deben ser seleccionados al menos una vez a lo largo del horizonte de planificación.**

b) Si un proveedor es seleccionado, debe permanecer activo durante un mínimo de L_p^{min} períodos consecutivos.

c) Se prohíbe la elección de proveedores cuya distancia sea mayor o igual a $Dist^{max}$

Componentes del Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO A:

Conjuntos e Índices

$p \in P$	Proveedores de biomasa
$s \in S$	Sitios de suministro
$S_p \subseteq S$	Sitios pertenecientes al proveedor p
$b \in B$	Tipos de biomasa
$t \in T$	Períodos de tiempo

Parámetros (Datos)

a_{sbt}	Disponibilidad máxima de biomasa
d_t	Demanda de biomasa
$\alpha_b^{min}, \alpha_b^{max}$	Proporciones min. y max. de mezcla
I^{min}, I^{max}	Inventario min. y max.
I_0	Inventario inicial
$\gamma_p \in [0,1]$	Nivel de confiabilidad
c_{sbt}^{v}	Costo unitario de compra
c_{st}^{t}	Costo unitario de transporte
c_t^{inv}	Costo unitario de inventario
c_p^{f}	C. fijo de activación del proveedor

Variables de Decisión

x_{sbt}	Cantidad de biomasa tipo b adquirida en el sitio $s$en el período t
I_t	Inventario total en planta al final del período t
Q_{pt}	Volumen total recibido del proveedor p en el período t
Q_t	Volumen total recibido en el período t
$y_{pt} \in \{0,1\}$	1 si el proveedor p es activado en el período t; 0 en caso contrario

Componentes de un Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO A

Función Objetivo

$$\min \, Costos\ Totales = \sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{b\in B}(c^{v}_{sbt} + c^{t}_{st})x_{sbt} + \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c^{f}_{p}(1-\gamma_p)y_{pt} + \sum_{t\in T} c^{inv}_{t}\, I_t$$

Restricciones

$$x_{sbt} \le a_{sbt} \sum_{p:s\in S_p} y_{pt} \qquad \forall s,b,t$$

$$Q_{pt} = \sum_{s\in S_p}\sum_{b\in B} x_{sbt} \qquad \forall p,t$$

$$Q_t = \sum_{p\in P} Q_{pt} \qquad \forall t$$

$$\sum_{s\in S} x_{sbt} \le \alpha^{max}_{b} Q_t \qquad \forall b,t$$

$$\sum_{s\in S} x_{sbt} \le \alpha^{max}_{b} Q_t \qquad \forall b,t$$

$$I_1 = I_0 + Q_1 - d_1$$

$$I_t = I_{t-1} + Q_t - d_t \qquad \forall t > 1$$

$$I^{min} \le I_t \le I^{max} \qquad \forall t$$

$$Q_{pt} \le M y_{pt} \qquad \forall p,t$$

$$\sum_{t\in T} y_{pt} \ge 1 \qquad \forall p$$

Contexto del Problema: Nuevas condiciones

Manteniendo los parámetros del modelo original, evaluar los flujos de biomasa y los costos asociados al considerar, de manera individual, las siguientes condiciones adicionales:

a) Todos los proveedores deben ser seleccionados al menos una vez a lo largo del horizonte de planificación.

b) Si un proveedor es seleccionado, debe permanecer activo durante un mínimo de L_p^{min} períodos consecutivos.

c) Se prohíbe la elección de proveedores cuya distancia sea mayor o igual a $Dist^{max}$

Componentes del Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO B

Conjuntos e Índices

$p \in P$	Proveedores de biomasa
$s \in S$	Sitios de suministro
$S_p \subseteq S$	Sitios pertenecientes al proveedor p
$b \in B$	Tipos de biomasa
$t \in T$	Períodos de tiempo

Parámetros (Datos)

a_{sbt}	Disponibilidad máxima de biomasa
d_t	Demanda de biomasa
$\alpha_b^{min}, \alpha_b^{max}$	Proporciones min. y max. de mezcla
I^{min}, I^{max}	Inventario min. y max.
I_0	Inventario inicial
$\gamma_p \in [0,1]$	Nivel de confiabilidad
c_{sbt}^v	Costo unitario de compra
c_{st}^t	Costo unitario de transporte
c_t^{inv}	Costo unitario de inventario
c_p^f	C. fijo de activación del proveedor
L_p^{min}	Periodo de contrato mínimo

Variables de Decisión

x_{sbt}	Cantidad de biomasa tipo b adquirida en el sitio $s$en el período t
I_t	Inventario total en planta al final del período t
Q_{pt}	Volumen total recibido del proveedor p en el período t
Q_t	Volumen total recibido en el período t
$y_{pt} \in \{0,1\}$	1 si el proveedor p es activado en el período t; 0 en caso contrario
$\omega_{pt} \in \{0,1\}$	1 si el contrato con el proveerlo p comienza en el periodo t; o sino

Componentes de un Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO B

Función Objetivo

$$\min Costos\ Totales = \sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{b\in B}(c_{sbt}^{v} + c_{st}^{t})x_{sbt} + \sum_{p\in P}\sum_{t\in T} c_p^f(1-\gamma_p)\omega_{pt} + \sum_{t\in T} c_t^{inv} I_t$$

Restricciones

$$x_{sbt} \le a_{sbt} \sum_{p:s\in S_p} y_{pt} \qquad \forall s,b,t$$

$$Q_{pt} = \sum_{s\in S_p}\sum_{b\in B} x_{sbt} \qquad \forall p,t$$

$$Q_t = \sum_{p\in P} Q_{pt} \qquad \forall t$$

$$\sum_{s\in S} x_{sbt} \le \alpha_b^{max} Q_t \qquad \forall b,t$$

$$\sum_{s\in S} x_{sbt} \le \alpha_b^{max} Q_t \qquad \forall b,t$$

$$I_1 = I_0 + Q_1 - d_1$$

$$I_t = I_{t-1} + Q_t - d_t \qquad \forall t > 1$$

$$I^{min} \le I_t \le I^{max} \qquad \forall t$$

$$Q_{pt} \le M y_{pt} \qquad \forall p,t$$

Componentes de un Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO B

Relaciones lógicas:

$$\sum_{\tau=t}^{t+L_p^{min}-1} y_{p\tau} \geq L_p^{min}\, \omega_{pt} \quad \forall p$$

$$y_{pt} - y_{p,t-1} \leq \omega_{pt} \quad \forall p, t$$

$$y_{p0} = 0 \quad \forall p$$

$$\omega_{pt} \leq y_{pt} \quad \forall p, t$$

$$\omega_{pt} \leq 1 - y_{p,t-1} \quad \forall p, t$$

Contexto del Problema: Nuevas condiciones

Manteniendo los parámetros del modelo original, evaluar los flujos de biomasa y los costos asociados al considerar, de manera individual, las siguientes condiciones adicionales:

a) Todos los proveedores deben ser seleccionados al menos una vez a lo largo del horizonte de planificación.

b) Si un proveedor es seleccionado, debe permanecer activo durante un mínimo de L_p^{min} períodos consecutivos.

c) Se prohíbe la elección de proveedores cuya distancia sea mayor o igual a $Dist^{max}$

Componentes del Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO C

Conjuntos e Índices

$p \in P$	Proveedores de biomasa
$s \in S$	Sitios de suministro
$S_p \subseteq S$	Sitios pertenecientes al proveedor p
$b \in B$	Tipos de biomasa
$t \in T$	Períodos de tiempo

Parámetros (Datos)

a_{sbt}	Disponibilidad máxima de biomasa
d_t	Demanda de biomasa
$\alpha_b^{min}, \alpha_b^{max}$	Proporciones min. y max. de mezcla
I^{min}, I^{max}	Inventario min. y max.
I_0	Inventario inicial
$\gamma_p \in [0,1]$	Nivel de confiabilidad
c_{sbt}^{v}	Costo unitario de compra
c_{st}^{t}	Costo unitario de transporte
c_t^{inv}	Costo unitario de inventario
c_p^{f}	C. fijo de activación del proveedor
d_s	Distancia desde el sitio s a la planta
δ_s	$\begin{cases} 1 \text{ si } d_s \leq Dist^{max} \\ 0 \text{ si } d_s > Dist^{max} \end{cases}$

Variables de Decisión

x_{sbt}	Cantidad de biomasa tipo b adquirida en el sitio $s$en el período t
I_t	Inventario total en planta al final del período t
Q_{pt}	Volumen total recibido del proveedor p en el período t
Q_t	Volumen total recibido en el período t
$y_{pt} \in \{0,1\}$	1 si el proveedor p es activado en el período t; 0 en caso contrario

Componentes de un Modelo de Optimización: CASO DE ESTUDIO C

Función Objetivo

$$\min \mathit{Costos\ Totales} = \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} (c_{sbt}^{v} + c_{st}^{t}) x_{sbt} + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} c_{p}^{f} (1 - \gamma_p) y_{pt} + \sum_{t \in T} c_{t}^{inv} I_t$$

Restricciones

$$x_{sbt} \leq a_{sbt} \sum_{p: s \in S_p} y_{pt} \qquad \forall s, b, t$$

$$x_{sbt} \leq a_{sbt}\, \delta_s \qquad \forall s, b, t$$

$$Q_{pt} = \sum_{s \in S_p} \sum_{b \in B} x_{sbt} \qquad \forall p, t$$

$$Q_t = \sum_{p \in P} Q_{pt} \qquad \forall t$$

$$\sum_{s \in S} x_{sbt} \leq \alpha_b^{max} Q_t \qquad \forall b, t$$

$$\sum_{s \in S} x_{sbt} \leq \alpha_b^{max} Q_t \qquad \forall b, t$$

$$I_1 = I_0 + Q_1 - d_1$$

$$I_t = I_{t-1} + Q_t - d_t \qquad \forall t > 1$$

$$I^{min} \leq I_t \leq I^{max} \qquad \forall t$$

$$Q_{pt} \leq M y_{pt} \qquad \forall p, t$$

Contexto del Problema: Nuevas condiciones

	ORIGINAL	OPCION A	OPCION B	OPCION C
FO	29.297.948,3	29.340.593,58	29.350.848,5	30.041.380,7
Proveedores	69	100	61	60

Contexto del Problema: Nuevas condiciones

d) **Límite máximo de dependencia por proveedor**
Ningún proveedor puede aportar más de una fracción β_p^{max} del total de biomasa adquirida en el horizonte.

e) **Cantidad mínima de compra si se selecciona un proveedor**
Si un proveedor es seleccionado en un período, debe comprarse al menos una cantidad mínima Q_p^{min}

f) Número máximo/minimo de proveedores activos por período
En cada período solo pueden seleccionarse, como máximo/minimo, N^{max}/ N^{min} proveedores.

Conclusiones y Próximos Pasos

🔢 MILP como herramienta universal

Los modelos de programación entera mixta permiten capturar decisiones discretas (si/no, cuántas unidades) dentro de un framework de optimización lineal, globalmente óptimo y tratable.

🔧 Técnicas de modelado clave

La linealización de bilinealidades (binaria×continua, binaria×binaria) y la conversión de enteras a binarias son el núcleo para reformular problemas no lineales como MILP.

🧮 Programación lógica disyuntiva

Los Basic Steps permiten traducir sistemáticamente cualquier relación lógica (OR, AND, ⇒, ⟺) a desigualdades lineales con variables binarias.

🌲 Caso de estudio forestal

El modelo MILP de selección de proveedores de biomasa muestra cómo estos conceptos se aplican a un problema real de la industria energética-forestal del NEA argentino.

💻 Pyomo como plataforma

La implementación en Pyomo permite escalar el modelo, explorar escenarios y conectar con solvers comerciales de alta performance, todo desde el entorno Python.

¡Gracias!

Gabriela Corsano | Nicolás Vanzetti

Facultad de Ingeniería Química (UNL) | INGAR CONICET-UTN

{gcorsano, nvanzetti}@santafe-conicet.gov.ar

Un matemático ve estructura y lógica donde otros ven caos. La optimización es exactamente eso: encontrar el mejor orden posible dentro de las restricciones que impone la realidad — y demostrar que ese orden tiene consecuencias.

IA + Investigación Operativa: Modelos Híbridos.

¿Qué buscamos?

Desarrollar soluciones inteligentes para problemas complejos de la industria, combinando IA + IO

Objetivo: Investigación aplicada con impacto real en Industria y sistemas inteligentes

¿Por qué es importante?

Problemas reales:

- tienen restricciones complejas,
- son NP-hard,
- requieren decisiones rápidas y precisas,
- cambian dinámicamente con datos del mundo real.

Metodos Hibridos

IA

Aprendizaje, predicción y adaptación

Optimización

Decisiones factibles y eficientes

Líneas de trabajo posibles

- Optimización de rutas y logística inteligente.
- Predicción de demanda e inventarios.
- Smart grids y mercados energéticos.
- Supply chains resilientes.
- Optimización multiobjetivo.
- IA guiando algoritmos de optimización.
- Optimización de hiperparámetros y sistemas autónomos.

Tecnologías y herramientas

- Python
- Google Colab
- Machine Learning
- Deep Learning
- Optimización matemática
- Simulación
- Analítica de datos

Contactos

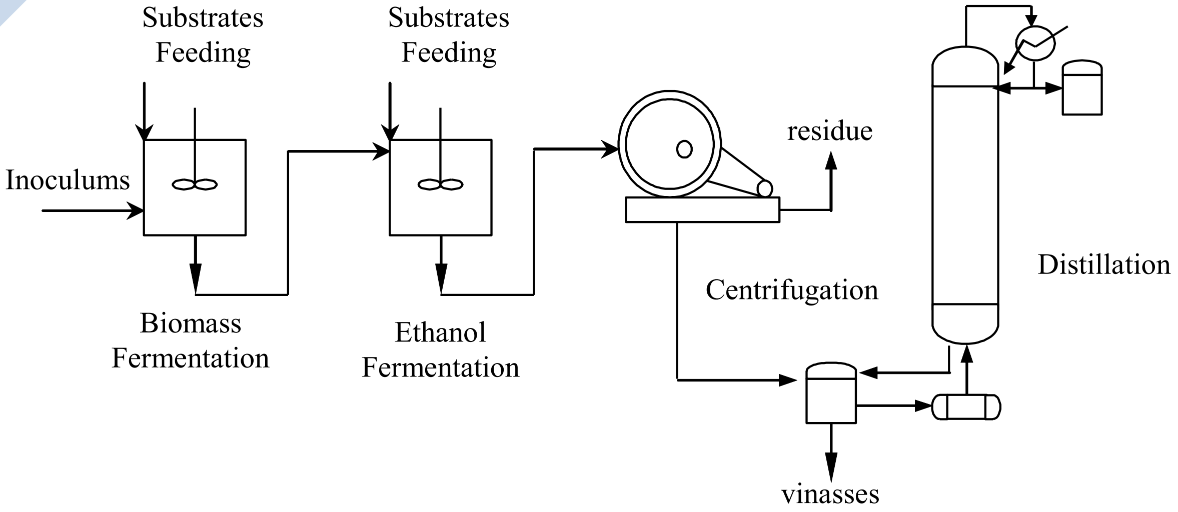
María Laura Cunico
laura-cunico@santafe-conicet.gov.ar

Dan Krohling
d.krohling@santafe-conicet.gov.ar

Nicolas Vanzetti
nvanzetti@santafe-conicet.gov.ar

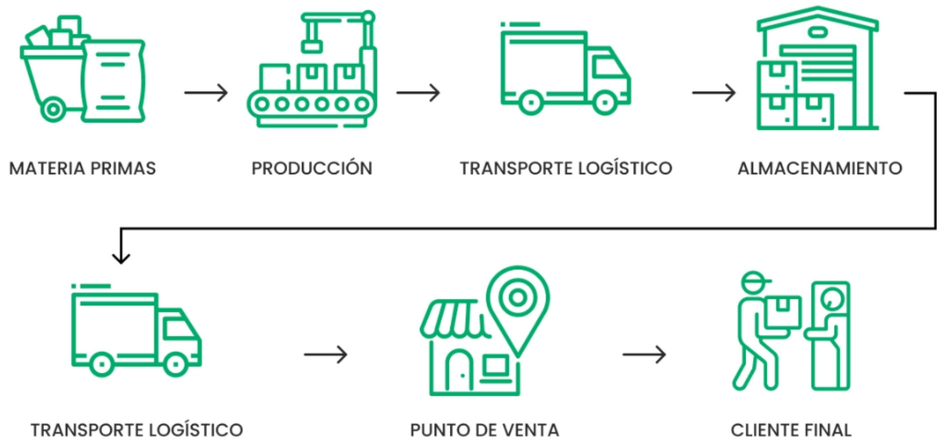
Modelado matemático y técnicas de resolución (exactas y heurísticas)

✓ **Síntesis, diseño, planificación de la producción en procesos productivos**



✓ **Logística**

✓ **Diseño, planificación y operación de cadenas de suministros**



Transferencia de tecnología:

- Carsa S.A.
- Limansky S.A.
- APF
- Tecsus S.R.L.
- Johnson & Johnson Innovative Medicine

Contacto:
Gabriela Corsano
Yanina Fumero

gcorsano@santafe-conicet.gov.ar
yfumero@santafe-conicet.gov.ar

LÍNEA 1: OPTIMIZACIÓN DE CADENAS DE SUMINISTRO.
RODOLFO DONDO – LUIS ZEBALLOS

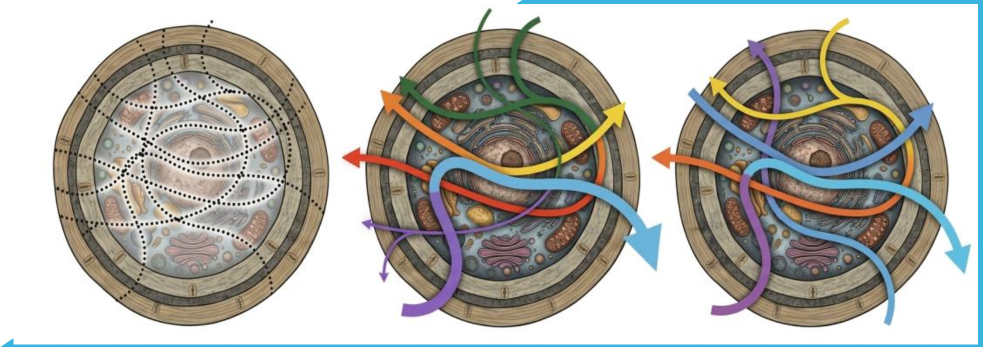
rdondo@santafe-conicet.gov.ar

- Optimización de la producción, flujos e inventarios.
- Sincronización de actividades de la cadena de suministro.
- Programación optima de actividades y gestión de recursos humanos.

LÍNEA 2: MODELADO BASADO EN OPTIMIZACIÓN DEL METABOLISMO MICROBIANO.

RODOLFO DONDO – ALEJANDRO BECCARIA

rdondo@santafe-conicet.gov.ar



- Estimación de flujos intracelulares de metabolitos.
- Optimización de procesos biotecnológicos.