

El Teorema de Incompletitud de Gödel: El límite donde la Matemática se encuentra consigo misma

Parte I

I Escuela MADATOP Matemática, Datos y Optimización

Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral

2026

*How quaint the ways of paradox
At common sense she gaily mocks.
W. S. Gilbert.*

Contradicciones

Estoy mintiendo



Paradojas

Argumentos contradictorios

Cuando Pinocho declara:

Estoy mintiendo.

Paradojas

Argumentos contradictorios

Cuando Pinocho declara:

Estoy mintiendo.

Si **está mintiendo**, entonces la frase pronunciada es falsa y por lo tanto **no está mintiendo**.

Paradojas

Argumentos contradictorios

Cuando Pinocho declara:

Estoy mintiendo.

Si está mintiendo, entonces la frase pronunciada es falsa y por lo tanto no está mintiendo.

Por el contrario, si **no está mintiendo**, la frase es verdadera, de modo que **está mintiendo**.

Paradojas

Argumentos contradictorios

Cuando Pinocho declara:

Estoy mintiendo.

Si está mintiendo, entonces la frase pronunciada es falsa y por lo tanto no está mintiendo.

Por el contrario, si no está mintiendo, la frase es verdadera, de modo que está mintiendo.

En cualquier caso, **está mintiendo** y **no está mintiendo** y tenemos una contradicción.

A y no A .

Paradojas

Argumentos contradictorios en matemática

La paradoja de Russell (1902)

Consideremos el conjunto A de aquellos conjuntos X que no son miembros de sí mismos:

$$A = \{X : X \notin X\}.$$

Por definición,

$$A \in A \quad \text{si y solo si} \quad A \notin A$$

Paradojas

Argumentos contradictorios en matemática

La paradoja de Russell (1902)

Consideremos el conjunto A de aquellos conjuntos X que no son miembros de sí mismos:

$$A = \{X : X \notin X\}.$$

Por definición,

$$A \in A \quad \text{si y solo si} \quad A \notin A$$

En cualquier caso tenemos una contradicción:

C y no C .

Traen problemas las paradojas?

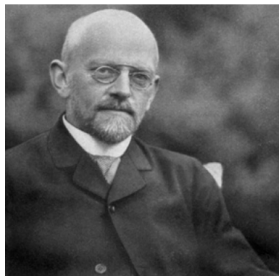
Las paradojas que citamos son genuinas en el sentido de que ninguna de ellas tiene defectos argumentativos.

Traen problemas las paradojas?

Las paradojas que citamos son genuinas en el sentido de que ninguna de ellas tiene defectos argumentativos.

La necesidad de distinguir entre los objetos matemáticos y el lenguaje que los describe impulsó el desarrollo de la Lógica Matemática a comienzos del siglo XX.

El programa formalista de Hilbert



David Hilbert (1862-1943)

Toda la matemática se basa en un sistema finito de axiomas escogidos correctamente, de modo que el sistema es consistente (esto es, libre de contradicciones) y completo.

[...] he ahí un problema. Busca su solución. La podrás encontrar mediante la razón pura, pues en Matemática no hay ignorabimus.

París, 1900.

Esto permitiría decidir la verdad o falsedad de cada afirmación matemática de manera puramente sintáctica, de un modo algorítmico.

Para eliminar las contradicciones...

Propósitos de Hilbert:

- Eliminar las contradicciones de la matemática.
- Asegurar la certeza del razonamiento matemático.
- Fundamentar toda la ciencia sobre bases rigurosas.

Idea central:

- Formalizar la matemática mediante un lenguaje preciso.
- Trabajar con símbolos y reglas explícitas.
- Evitar ambigüedades que generen paradojas.

Objetivo final:

- Sistemas **consistentes**, **completos** y **decidibles**.

Lenguajes de primer orden

Lenguajes de primer orden

Todo lenguaje de primer orden \mathcal{L} consta de los siguientes símbolos, que se denominan símbolos lógicos:

- Los conectivos proposicionales \neg y \rightarrow y el cuantificador universal \forall .
- Símbolos auxiliares de puntuación: (,) y ,.
- Variables: x_1, x_2, \dots

Además de símbolos lógicos, los lenguajes de primer orden poseen un vocabulario, o sea:

- Un conjunto (a lo sumo numerable, posiblemente vacío) de constantes a_1, a_2, \dots
- Símbolos de función $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \dots$ (aridad $n_i > 0$)
- Símbolos de predicado $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \dots$ (aridad $n_i > 0$)

Ejemplo de lenguaje

Consideremos un lenguaje \mathcal{L} con vocabulario:

- Un símbolo de función binaria $+$
- Un símbolo de constante 0
- Un símbolo de predicado binario $=$
- Un símbolo de predicado binario $<$

Otros símbolos lógicos que nos son familiares:

Usualmente no trabajamos solo con \neg , \rightarrow y \forall como únicos símbolos.

Otros símbolos lógicos que nos son familiares:

Usualmente no trabajamos solo con \neg , \rightarrow y \forall como únicos símbolos. Sin embargo los otros pueden interpretarse a partir de estos:

- disyunción $x \vee y := \neg x \rightarrow y$;
- conjunción $x \wedge y := \neg(\neg x \vee \neg y)$
- bicondicional $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
- existencial $\exists x := \neg \forall \neg x$.

Lenguaje de primer orden

A partir de estos símbolos se definen inductivamente:

- los términos
- las fórmulas

Términos

- Toda variable es un término.
- Toda constante es un término.
- Si f es un símbolo de función n -ario y t_1, \dots, t_n son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término.

Ejemplos:

Si \mathcal{L} tiene en su vocabulario:

- Un símbolo de función binaria $+$
- Un símbolo de constante 0
- Un símbolo de predicado binario $=$
- Un símbolo de predicado binario $<$

Ejemplos de términos:

$$x, \quad x + y, \quad (x + y) + z, \quad (x + 0),$$

Lenguaje de primer orden

Fórmulas

- **Fórmulas atómicas:** si P es un símbolo de predicado n -ario y t_1, \dots, t_n son términos, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula.
- Si φ, ψ son fórmulas, también lo son: $\neg\varphi, (\varphi \rightarrow \psi)$.
- Si φ es fórmula y x una variable: $\forall x \varphi$.

Ejemplos:

- **Términos:** $x, a, f(x), g(f(x), a)$.
- **Fórmulas atómicas:** $P_1(x), P_2(x, a), P_3(f(x))$.
- **Fórmulas:**
 - $\neg P_1(x)$
 - $(P_1(x) \rightarrow P_3(f(x)))$
 - $\forall x P_1(x)$

Variables libres y ligadas

Variables libres y ligadas

- Una variable está **ligada** en una fórmula si está bajo el alcance de un cuantificador.
- Una variable es **libre** si no está ligada.

Ejemplos de variables libres y ligadas:

- En $\forall x P_1(x)$: x está ligada.
- En $P_1(x)$: x es libre.
- En $P_3(f(x)) \rightarrow (\forall x P_1(x))$: x está libre en el antecedente y ligada en el consecuente.
- En $\forall x P_2(x, y)$: x está ligada, y es libre.

Ejemplo de lenguaje

Consideremos un lenguaje \mathcal{L} con:

- Un símbolo de función binaria $+$
- Un símbolo de predicado binario $=$
- Un símbolo de predicado binario $<$

Ejemplos de términos:

$$x, \quad x + y, \quad (x + y) + z$$

Ejemplos de fórmulas:

- $(x + y) < z$
- $\forall x \exists y (x < y)$
- $\forall x \forall y \neg(x = y) \rightarrow ((x < y) \vee (y < x))$

Estas expresiones serán interpretadas, por ejemplo, sobre \mathbb{N} o \mathbb{R} , donde $+$ y $<$ tienen su significado usual.

Interpretaciones

Interpretaciones

Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. Una **interpretación** \mathcal{M} consiste en:

- Un conjunto no vacío D (dominio)
- Una asignación que:
 - a cada constante a le asigna un elemento fijo $a_D \in D$.
 - a cada f^n le asigna una función $f^{\mathcal{D}} : D^n \rightarrow D$
 - a cada P^n le asigna una relación $P^{\mathcal{D}} \subseteq D^n$

Además, se considera una **asignación de variables** $s : \{x_i\} \rightarrow D$.

Interpretaciones

Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. Una **interpretación** \mathcal{M} consiste en:

- Un conjunto no vacío D (dominio)
- Una asignación que:
 - a cada constante a le asigna un elemento fijo $a_D \in D$.
 - a cada f^n le asigna una función $f^{\mathcal{D}} : D^n \rightarrow D$
 - a cada P^n le asigna una relación $P^{\mathcal{D}} \subseteq D^n$

Además, se considera una **asignación de variables** $s : \{x_i\} \rightarrow D$.

Valor de un término

Dado un término t y una asignación s , el valor $t^{\mathcal{M}}(s)$ se obtiene:

- reemplazando cada variable y cada constante por el elemento de D que le asigna s ;
- e interpretando los símbolos de función según \mathcal{M} .

Ejemplo

Tomando como dominio al conjunto de enteros positivos e interpretando

$$P(y, z) := y \leq z$$

entonces

- 1 $P(x_1, x_2)$ se interpreta $x_1 \leq x_2$.
- 2 $\forall x_2 P(x_1, x_2)$ se interpreta como
para todo entero positivo x_2 , $x_1 \leq x_2$,
- 3 $\exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2)$ se interpreta como
*existe un entero positivo x_1 tal que para todo entero positivo x_2 ,
 $x_1 \leq x_2$,*

Ejemplo

Tomando como dominio al conjunto de enteros positivos e interpretando

$$P(y, z) := y \leq z$$

entonces

① $P(x_1, x_2)$ se interpreta $x_1 \leq x_2$.

② $\forall x_2 P(x_1, x_2)$ se interpreta como

para todo entero positivo x_2 , $x_1 \leq x_2$,

③ $\exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2)$ se interpreta como

*existe un entero positivo x_1 tal que para todo entero positivo x_2 ,
 $x_1 \leq x_2$,*

La interpretación de la fórmula anterior en este dominio es un enunciado verdadero que afirma que existe un entero positivo mínimo.

Ejemplo

Tomando como dominio al conjunto de enteros positivos e interpretando

$$P(y, z) := y \leq z$$

entonces

① $P(x_1, x_2)$ se interpreta $x_1 \leq x_2$.

② $\forall x_2 P(x_1, x_2)$ se interpreta como

para todo entero positivo x_2 , $x_1 \leq x_2$,

③ $\exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2)$ se interpreta como

*existe un entero positivo x_1 tal que para todo entero positivo x_2 ,
 $x_1 \leq x_2$,*

La interpretación de la fórmula anterior en este dominio es un enunciado verdadero que afirma que existe un entero positivo mínimo. Si hubiésemos elegido como dominio al conjunto de todos los enteros, este último enunciado sería falso.

Interpretaciones

Fijada una interpretación \mathcal{M} de un lenguaje \mathcal{L} , una

fórmula cerrada o enunciado

es aquella fórmula sin variables libres, que representa una proposición que es verdadera o falsa mientras que una

fórmula con variables libres

puede satisfacerse (i.e, ser verdadera) para algunas asignaciones y no satisfacerse (i.e.: ser falsa) para otras.

Verdad

Sea \mathcal{M} una interpretación y s una asignación.

Relación de verdad

Definimos $\mathcal{M}, s \models \varphi$ por inducción en φ :

- Si φ es $P(t_1, \dots, t_n)$:

$$\mathcal{M}, s \models \varphi \iff (t_1^{\mathcal{M}}(s), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(s)) \in P^{\mathcal{M}}.$$

- $\neg\varphi$: $\mathcal{M}, s \models \neg\varphi \iff \mathcal{M}, s \not\models \varphi$.
- $\varphi \rightarrow \psi$: $\mathcal{M}, s \models \varphi \rightarrow \psi \iff$ si $\mathcal{M}, s \models \varphi$ entonces $\mathcal{M}, s \models \psi$.
- $\varphi \wedge \psi$: $\mathcal{M}, s \models \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{M}, s \models \varphi$ y $\mathcal{M}, s \models \psi$.
- $\forall x \varphi$:

$$\mathcal{M}, s \models \forall x \varphi \iff \forall d \in D, \mathcal{M}, s \models \varphi(x|d).$$

- $\exists x \varphi$:

$$\mathcal{M}, s \models \exists x \varphi \iff \exists d \in D \text{ tal que } \mathcal{M}, s \models \varphi(x|d).$$

Verdad en \mathcal{M}

φ es **verdadera** en \mathcal{M} si

$$\mathcal{M}, s \models \varphi$$

para toda asignación s . En caso de serlo se escribe

$$\mathcal{M} \models \varphi$$

Ejemplo: Sea \mathcal{M} la interpretación con:

- Dominio $D = \mathbb{N}$ (enteros positivos),
- $=$ y $<$ interpretado la igualdad y el orden usuales.
- Sea s una asignación con $s(x) = 2$, $s(y) = 3$.

Ejemplo 1

$$\mathcal{M}, s \models x < y \quad \text{porque} \quad 2 < 3.$$

Ejemplo 2

$$\mathcal{M}, s \models \exists x (x < y)$$

porque existe $d \in \mathbb{N}$ (por ejemplo $d = 1$) tal que $1 < 2$

Ejemplo 3

$$\mathcal{M}, s \not\models \forall x (x < y)$$

porque no vale para todo $d \in \mathbb{N}$ (por ejemplo $d = 5$ no cumple $5 < 3$).

Satisfacibilidad

En una interpretación

Una fórmula φ es **satisfacible en** \mathcal{M} si existe una asignación s tal que

$$\mathcal{M}, s \models \varphi.$$

Satisfacibilidad

φ es **satisfacible** si existe una interpretación \mathcal{M} y una asignación s tales que

$$\mathcal{M}, s \models \varphi.$$

Validez lógica

Definición

Una fórmula φ es **lógicamente válida** si para toda interpretación \mathcal{M} y toda asignación s se cumple

$$\mathcal{M}, s \models \varphi.$$

o equivalentemente, si para toda interpretación \mathcal{M} se cumple

$$\mathcal{M} \models \varphi.$$

- Se escribe: $\models \varphi$.
- La fórmula es verdadera bajo cualquier interpretación y cualquier asignación.

Ejemplos de validez lógica

Fórmulas lógicamente válidas

- $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$
- $\varphi \vee \neg\varphi$

Fórmulas que no son lógicamente válidas

- $\forall x \varphi(x)$
- $\varphi(x) \vee \psi(x) \rightarrow \varphi(x)$

- Las primeras son verdaderas en toda interpretación y bajo toda asignación.
- Las segundas fallan en alguna interpretación.

Teorías de primer orden

Teorías formales

Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden. Una **teoría de primer orden en el lenguaje \mathcal{L}** consta de:

- Símbolos de \mathcal{L} , términos y fórmulas en \mathcal{L} .
- Un conjunto de fórmulas de \mathcal{L} llamadas **axiomas**.
- Un conjunto finito de relaciones entre fórmulas, llamadas **reglas de inferencia**.

Sintaxis vs. Semántica

Sintaxis

- Axiomas y reglas
- Teoremas
- Deducibilidad

Semántica

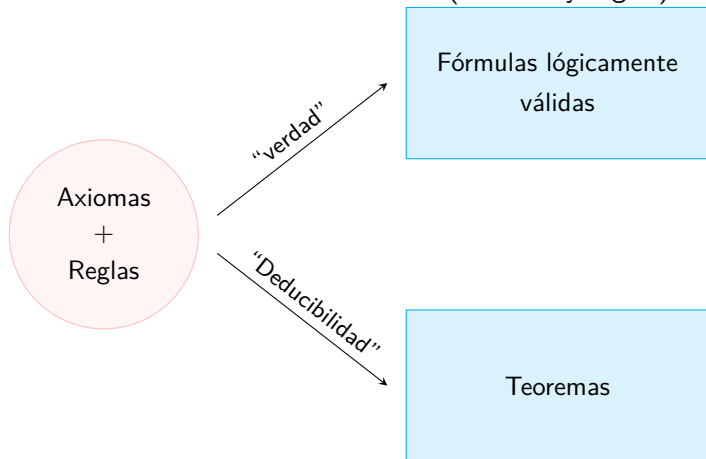
- Interpretación
- Fórmulas lógicamente válidas
- Verdad

Fórmulas lógicamente válidas vs teoremas

El objetivo es encontrar un sistema formal (axiomas y reglas) tales que:

Fórmulas lógicamente válidas vs teoremas

El objetivo es encontrar un sistema formal (axiomas y reglas) tales que:



Cálculo de predicados vs. teorías de primer orden

Cálculo de predicados (lógica de primer orden)

- es un sistema deductivo.
- Se modela el comportamiento solo de los símbolos lógicos $\neg, \rightarrow, \forall, \exists$, no importa el vocabulario del sistema.

Teorías de primer orden

- Instancias del cálculo de predicados con un lenguaje específico.
- Incorporan símbolos no lógicos (por ejemplo, $+, 0, <$).
- Añaden axiomas propios de un dominio particular (grupos, geometría, aritmética, etc.).

Idea clave: el cálculo de predicados es la herramienta básica para razonar de manera correcta; las teorías de primer orden incorporan herramientas para modelar nociones matemáticas concretas.

Cálculo de predicados

Axiomática del cálculo de predicados:

Los axiomas proposicionales son todas las instancias de los siguientes esquemas:

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$

Axiomática del cálculo de predicados:

Los axiomas proposicionales son todas las instancias de los siguientes esquemas:

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$

A estos se agregan los axiomas propios del cálculo de predicados:

- (A4) $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$
- (A5) $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)$

donde t es libre para x en φ .

Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia son:

- **Modus Ponens:**

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- **Generalización:**

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$

(con las restricciones usuales sobre x)

Teoremas

Una fórmula φ es un **teorema** si existe una sucesión finita

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$$

tal que cada φ_i es:

- un axioma, o
- se obtiene de fórmulas anteriores mediante reglas de inferencia

Se escribe:

$$\vdash \varphi$$

Ejemplo:

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Ejemplo:

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Demostración:

- ① $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (A1)
- ② $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ (A1)
- ③ $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (A2)
- ④ $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (MP 2,3)
- ⑤ $\varphi \rightarrow \varphi$ (MP 1,4)

Ejemplos de teoremas

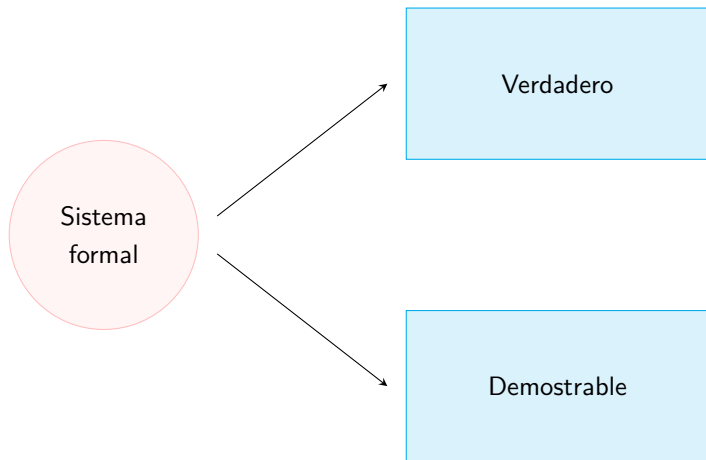
Algunos resultados clásicos:

- $\vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \varphi(x)$
- $\vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \psi)$
- $\vdash \forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$

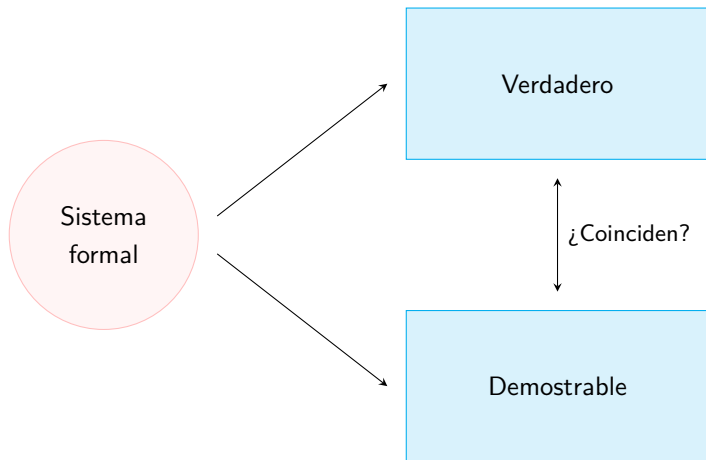
Estos reflejan propiedades básicas de los cuantificadores.

- El sistema es **formal**: las demostraciones son puramente sintácticas
- La semántica se conecta con la sintaxis mediante resultados como:
 - **Adecuación** (corrección)
 - **Completitud**
- Este formalismo permite estudiar la deducibilidad independientemente de las interpretaciones.

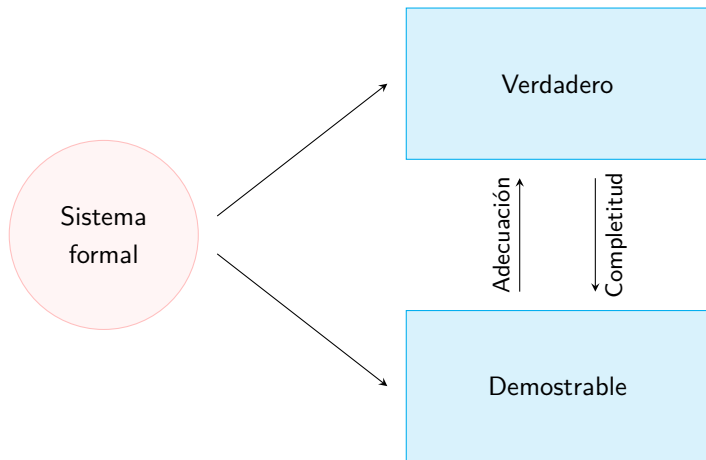
El cálculo de primer orden



El cálculo de primer orden



El cálculo de primer orden



Ejercicio: demostrar usando axiomas y reglas que

$$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$$

para cada par de fórmulas φ, ψ .

.... **Idea:** usar que ya probamos $\vdash \psi \rightarrow \psi$.

Recordemos los axiomas:

- (A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$
- (A4) $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$
- (A5) $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)$

donde t es libre para x en φ .

Ejercicio: demostrar usando axiomas y reglas que

$$\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$$

para cada par de fórmulas φ, ψ .

$$\textcircled{1} \quad (\psi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)) \quad (\text{A1})$$

$$\textcircled{2} \quad \psi \rightarrow \psi \quad (\text{teorema})$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi) \quad (\text{MP, 1,2})$$

El Teorema de Incompletitud de Gödel: El límite donde la Matemática se encuentra consigo misma

Parte II

I Escuela MADATOP Matemática, Datos y Optimización

Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral

2026

Teoría de números formal

Arithmetices principia



Giuseppe Peano (1858-1932)

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus)*.

- > 1 > *unitas.*
- > $a+1$ > *sequens a , sive a plus 1.*
- > $=$ > *est aequalis. Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.*

Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N \cdot \supset a = a.$
3. $a, b, c \in N \cdot \supset a = b \cdot = b = c.$
4. $a, b \in N \cdot \supset a = b \cdot b = c \cdot \supset a = c.$
5. $a = b \cdot b \in N \cdot \supset a \in N.$
6. $a \in N \cdot \supset a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N \cdot \supset a = b \cdot = a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N \cdot \supset a + 1 \neq 1.$
9. $k \in K \cdot i \in k \cdot a \in N \cdot a \in k \cdot \supset a + 1 \in k :: \supset N \supset k.$

G. Peano, Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita (1889)

La teoría S

Como teoría de primer orden...

La teoría S

Como teoría de primer orden...

El **lenguaje de la aritmética** \mathcal{L}_A para nuestra teoría consistirá en:

- Un símbolo de predicado binario $=$
- Un símbolo constante 0
- Tres símbolos de función, una unaria $'$ y dos binarias $+$, \cdot

La teoría S

Como teoría de primer orden...

El **lenguaje de la aritmética** \mathcal{L}_A para nuestra teoría consistirá en:

- Un símbolo de predicado binario =
- Un símbolo constante 0
- Tres símbolos de función, una unaria ' y dos binarias +, ·

Los axiomas propios de la teoría serán:

$$(S1) \quad x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_3)$$

$$(S2) \quad x_1 = x_2 \rightarrow x'_1 = x'_2$$

$$(S3) \quad 0 \neq x'_1$$

$$(S4) \quad x'_1 = x'_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$(S5) \quad x_1 + 0 = x_1$$

$$(S6) \quad x_1 + x'_2 = (x_1 + x_2)'$$

$$(S7) \quad x_1 \cdot 0 = 0$$

$$(S8) \quad x_1 \cdot x'_2 = (x_1 \cdot x_2) + x_1$$

La teoría S

Como teoría de primer orden...

El **lenguaje de la aritmética** \mathcal{L}_A para nuestra teoría consistirá en:

- Un símbolo de predicado binario =
- Un símbolo constante 0
- Tres símbolos de función, una unaria ' y dos binarias +, ·

Los axiomas propios de la teoría serán:

$$(S1) \quad x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_3)$$

$$(S2) \quad x_1 = x_2 \rightarrow x'_1 = x'_2$$

$$(S3) \quad 0 \neq x'_1$$

$$(S4) \quad x'_1 = x'_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$(S5) \quad x_1 + 0 = x_1$$

$$(S6) \quad x_1 + x'_2 = (x_1 + x_2)'$$

$$(S7) \quad x_1 \cdot 0 = 0$$

$$(S8) \quad x_1 \cdot x'_2 = (x_1 \cdot x_2) + x_1$$

(S9) para cada fórmula \mathcal{B} se tiene el axioma

$$\mathcal{B}(0) \rightarrow ((\forall x)(\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x'))) \rightarrow (\forall x)\mathcal{B}(x))$$

Algunas propiedades

Las siguientes fórmulas son teoremas de S , para términos t, s, r :

- $t = t$
- $t = s \rightarrow s = t$
- $t = s \rightarrow (s = r \rightarrow t = r)$
- $t + s = s + t$
- $t \cdot s = s \cdot t$
- $t = s \rightarrow t + r = s + r$
- $t = s \rightarrow t \cdot r = s \cdot r$

Numerales

Los términos $0, 0', 0'', 0''', \dots$ serán llamados **numerales** y los denotaremos por $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots$

Numerales

Los términos $0, 0', 0'', 0''', \dots$ serán llamados **numerales** y los denotaremos por $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots$

Para t un término se tienen por ejemplo los teoremas en S :

- $t + \bar{1} = t'$
- $t \cdot \bar{1} = t$
- $t \cdot \bar{2} = t + t$

Agregando orden

Denotamos

$t \neq s$ a la fórmula $\neg(t = s)$

$t < s$ a la fórmula $(\exists w)(w \neq 0 \wedge w + t = s)$

$t \leq s$ a la fórmula $t < s \vee t = s$

Agregando orden

Denotamos

$t \neq s$ a la fórmula $\neg(t = s)$

$t < s$ a la fórmula $(\exists w)(w \neq 0 \wedge w + t = s)$

$t \leq s$ a la fórmula $t < s \vee t = s$

Con esto, para cada fórmula \mathcal{B} tenemos los teoremas:

- *(Inducción fuerte).*

$$\vdash_S (\forall x)((\forall z)(z < x \rightarrow \mathcal{B}(z)) \rightarrow \mathcal{B}(x)) \rightarrow (\forall x)\mathcal{B}(x)$$

- *(Principio de buena ordenación).*

$$\vdash_S (\exists x)\mathcal{B}(x) \rightarrow (\exists y)\mathcal{B}(y) \wedge (\forall z)(z < y \rightarrow \neg\mathcal{B}(z))$$

Relaciones expresables y funciones representables

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A .

Relaciones expresables y funciones representables

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A .

Una relación n -aria R de números naturales es **expresable** en K si existe una fórmula $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ tal que

- Si $R(k_1, \dots, k_n)$ es verdadera, $\vdash_K \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$
- Si $R(k_1, \dots, k_n)$ es falsa, $\vdash_K \neg \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$

Relaciones expresables y funciones representables

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A .

Una relación n -aria R de números naturales es **expresable** en K si existe una fórmula $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ tal que

- Si $R(k_1, \dots, k_n)$ es verdadera, $\vdash_K \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$
- Si $R(k_1, \dots, k_n)$ es falsa, $\vdash_K \neg \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$

Una función n -aria f de números naturales es **representable** en K si existe una fórmula $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n, y)$ tal que

- Si $f(k_1, \dots, k_n) = m$ entonces $\vdash_K \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \overline{m})$
- $\vdash_K (\exists_1 y) \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, y)$

Relaciones expresables y funciones representables

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A .

Una relación n -aria R de números naturales es **expresable** en K si existe una fórmula $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ tal que

- Si $R(k_1, \dots, k_n)$ es verdadera, $\vdash_K \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$
- Si $R(k_1, \dots, k_n)$ es falsa, $\vdash_K \neg \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$

Una función n -aria f de números naturales es **representable** en K si existe una fórmula $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n, y)$ tal que

- Si $f(k_1, \dots, k_n) = m$ entonces $\vdash_K \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \overline{m})$
- $\vdash_K (\exists_1 y) \mathcal{B}(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, y)$

Para teorías con igualdad que satisfacen $\vdash_K 0 \neq \overline{1}$ se tiene que una relación es expresable si y sólo si su **función característica** es representable.

En S , las siguientes funciones son representables:

En S , las siguientes funciones son representables:

- La función *cero* $Z(x) = 0$, por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge y = 0$

En S , las siguientes funciones son representables:

- La función *cero* $Z(x) = 0$, por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge y = 0$
- La función *sucesor* $N(x) = x + 1$, por la fórmula $y = x'_1$

En S , las siguientes funciones son representables:

- La función *cero* $Z(x) = 0$, por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge y = 0$
- La función *sucesor* $N(x) = x + 1$, por la fórmula $y = x'_1$
- Las *proyecciones* $U_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_j$, por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = x_n \wedge y = x_j$

En S , las siguientes funciones son representables:

- La función *cero* $Z(x) = 0$, por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge y = 0$
- La función *sucesor* $N(x) = x + 1$, por la fórmula $y = x'_1$
- Las *proyecciones* $U_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_j$, por la fórmula $x_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = x_n \wedge y = x_j$
- Si $g(x_1, \dots, x_m)$, $h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)$ son representables, también lo es su *sustitución*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$$

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones.

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones. Para obtener nuevas funciones f consideraremos las reglas de

- *Sustitución.* $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones. Para obtener nuevas funciones f consideraremos las reglas de

- *Sustitución.* $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$
- *Recursión.* $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$ y
 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones. Para obtener nuevas funciones f consideraremos las reglas de

- *Sustitución.* $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$
- *Recursión.* $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$ y
 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$
- *Mínimo restringido.* $f(x_1, \dots, x_n) = \text{mín } y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$
siempre que exista al menos un y tal que $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones. Para obtener nuevas funciones f consideraremos las reglas de

- *Sustitución.* $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$
- *Recursión.* $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$ y
 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$
- *Mínimo restringido.* $f(x_1, \dots, x_n) = \text{mín } y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$
siempre que exista al menos un y tal que $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$

Una función será **recursiva** si se puede obtener a partir de las iniciales mediante sustituciones, recursiones y mínimos restringidos.

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones. Para obtener nuevas funciones f consideraremos las reglas de

- *Sustitución.* $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$
- *Recursión.* $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$ y
 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$
- *Mínimo restringido.* $f(x_1, \dots, x_n) = \text{mín } y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$
siempre que exista al menos un y tal que $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$

Una función será **recursiva** si se puede obtener a partir de las iniciales mediante sustituciones, recursiones y mínimos restringidos.

Una relación será **recursiva** si su característica es recursiva.

Funciones recursivas

Llamaremos *funciones iniciales* a las funciones cero, sucesor y las proyecciones. Para obtener nuevas funciones f consideraremos las reglas de

- *Sustitución.* $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$
- *Recursión.* $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$ y
 $f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$
- *Mínimo restringido.* $f(x_1, \dots, x_n) = \text{mín } y : g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$
siempre que exista al menos un y tal que $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$

Una función será **recursiva** si se puede obtener a partir de las iniciales mediante sustituciones, recursiones y mínimos restringidos.

Una relación será **recursiva** si su característica es recursiva.

En S , toda función recursiva es representable y toda relación recursiva es expresable. Si S es consistente la recíproca es cierta.

Ejemplos

Son recursivas las funciones:

- $x + y$
- $x \cdot y$
- $\delta(x) = x - 1$ si $x > 0$ y $\delta(0) = 0$
- $\text{sgn}(x)$
- $\text{mín}(x, y)$, $\text{máx}(x, y)$
- $\text{rm}(x, y)$, el resto de la división de y por x

Numeración de Gödel

Números de Gödel

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A . A cada símbolo u le asignamos un natural impar $g(u)$ de la siguiente manera:

$(\mapsto 3$	$\rightarrow \mapsto 11$	$' \mapsto 49$
$) \mapsto 5$	$\forall \mapsto 13$	$+ \mapsto 97$
$, \mapsto 7$	$0 \mapsto 15$	$\cdot \mapsto 289$
$\neg \mapsto 9$	$x_i \mapsto 13 + 8i$	$= \mapsto 99$

Números de Gödel

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A . A cada símbolo u le asignamos un natural impar $g(u)$ de la siguiente manera:

$(\mapsto 3$	$\rightarrow \mapsto 11$	$' \mapsto 49$
$) \mapsto 5$	$\forall \mapsto 13$	$+ \mapsto 97$
$, \mapsto 7$	$0 \mapsto 15$	$\cdot \mapsto 289$
$\neg \mapsto 9$	$x_i \mapsto 13 + 8i$	$= \mapsto 99$

Dada una expresión $u_0 u_1 \dots u_r$ de símbolos de K , su número de Gödel será

$$g(u_0 u_1 \dots u_r) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \dots p_r^{g(u_r)}$$

donde p_0, p_1, \dots es una enumeración de los primos.

Números de Gödel

Sea K una teoría en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A . A cada símbolo u le asignamos un natural impar $g(u)$ de la siguiente manera:

$(\mapsto 3$	$\rightarrow \mapsto 11$	$' \mapsto 49$
$) \mapsto 5$	$\forall \mapsto 13$	$+ \mapsto 97$
$, \mapsto 7$	$0 \mapsto 15$	$\cdot \mapsto 289$
$\neg \mapsto 9$	$x_i \mapsto 13 + 8i$	$= \mapsto 99$

Dada una expresión $u_0 u_1 \dots u_r$ de símbolos de K , su número de Gödel será

$$g(u_0 u_1 \dots u_r) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \dots p_r^{g(u_r)}$$

donde p_0, p_1, \dots es una enumeración de los primos.

Si e_0, e_1, \dots, e_r es una lista de expresiones de símbolos en K [por ejemplo en una demostración], su número de Gödel será

$$g(e_0, e_1 \dots, e_r) = 2^{g(e_0)} 3^{g(e_1)} \dots p_r^{g(e_r)}$$

para pensar...

Por ejemplo $x_1 = x_2$ (que en realidad se escribe como $= (x_1, x_2)$) será

para pensar...

Por ejemplo $x_1 = x_2$ (que en realidad se escribe como $= (x_1, x_2)$) será

$$g(x_1 = x_2) = 2^{99} 3^3 5^{21} 7^7 11^{29} 13^5$$

para pensar...

Por ejemplo $x_1 = x_2$ (que en realidad se escribe como $= (x_1, x_2)$) será

$$g(x_1 = x_2) = 2^{99} 3^3 5^{21} 7^7 11^{29} 13^5$$

¿Por qué los números de las listas no coinciden con los de las expresiones ni con los de los símbolos?

para pensar...

Por ejemplo $x_1 = x_2$ (que en realidad se escribe como $= (x_1, x_2)$) será

$$g(x_1 = x_2) = 2^{99} 3^3 5^{21} 7^7 11^{29} 13^5$$

¿Por qué los números de las listas no coinciden con los de las expresiones ni con los de los símbolos?

¿Por qué tenemos unicidad?

para pensar...

Por ejemplo $x_1 = x_2$ (que en realidad se escribe como $\ulcorner x_1 = x_2 \urcorner$) será

$$g(x_1 = x_2) = 2^{99} 3^3 5^{21} 7^7 11^{29} 13^5$$

¿Por qué los números de las listas no coinciden con los de las expresiones ni con los de los símbolos?

¿Por qué tenemos unicidad?

¿Todo número es el número de Gödel de algún objeto?

para pensar...

Por ejemplo $x_1 = x_2$ (que en realidad se escribe como $\ulcorner x_1 = x_2 \urcorner$) será

$$g(x_1 = x_2) = 2^{99} 3^3 5^{21} 7^7 11^{29} 13^5$$

¿Por qué los números de las listas no coinciden con los de las expresiones ni con los de los símbolos?

¿Por qué tenemos unicidad?

¿Todo número es el número de Gödel de algún objeto?

Determinar los objetos con número de Gödel:

- 1944
- 49
- 15
- 13894
- $2^{99}3^{11}5^9$

Vocabulario y axiomas primitivos recursivos

Una teoría K en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A las siguientes propiedades son recursivas:

- $IC(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de constante
- $FL(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de función
- $PL(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de predicado

(diremos que K tiene un **vocabulario recursivo**)

Vocabulario y axiomas primitivos recursivos

Una teoría K en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A las siguientes propiedades son recursivas:

- $IC(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de constante
- $FL(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de función
- $PL(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de predicado

(diremos que K tiene un **vocabulario recursivo**)

Diremos que K tiene un **conjunto de axiomas recursivo** si la siguiente propiedad es recursiva

$PrAx(y)$: y es el número de Gödel de un axioma propio de K

Vocabulario y axiomas primitivos recursivos

Una teoría K en el lenguaje de la aritmética \mathcal{L}_A las siguientes propiedades son recursivas:

- $IC(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de constante
- $FL(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de función
- $PL(x)$: x es el número de Gödel de un símbolo de predicado

(diremos que K tiene un **vocabulario recursivo**)

Diremos que K tiene un **conjunto de axiomas recursivo** si la siguiente propiedad es recursiva

$PrAx(y)$: y es el número de Gödel de un axioma propio de K

En particular, S tiene un conjunto de axiomas recursivos.

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

- $\text{Sub}(y, u, v)$: la función que asigna el número de Gödel de la sustitución en el término con número de Gödel y a todas las instancias libres de la variable con número de Gödel v por la expresión con número de Gödel u

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

- $\text{Sub}(y, u, v)$: la función que asigna el número de Gödel de la sustitución en el término con número de Gödel y a todas las instancias libres de la variable con número de Gödel v por la expresión con número de Gödel u
- $\text{Num}(y)$: la función que asigna el número de Gödel del numeral \bar{y}

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

- $\text{Sub}(y, u, v)$: la función que asigna el número de Gödel de la sustitución en el término con número de Gödel y a todas las instancias libres de la variable con número de Gödel v por la expresión con número de Gödel u
- $\text{Num}(y)$: la función que asigna el número de Gödel del numeral \bar{y}
- $D(u)$: la **función diagonal**, si u es el número de Gödel de una fórmula $\mathcal{B}(x_1)$, devuelve el número de Gödel de $\mathcal{B}(\bar{u})$

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

- $\text{Sub}(y, u, v)$: la función que asigna el número de Gödel de la sustitución en el término con número de Gödel y a todas las instancias libres de la variable con número de Gödel v por la expresión con número de Gödel u
- $\text{Num}(y)$: la función que asigna el número de Gödel del numeral \bar{y}
- $D(u)$: la **función diagonal**, si u es el número de Gödel de una fórmula $\mathcal{B}(x_1)$, devuelve el número de Gödel de $\mathcal{B}(\bar{u})$
- $\text{Prf}(y)$: y es el número de Gödel de una demostración

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

- $\text{Sub}(y, u, v)$: la función que asigna el número de Gödel de la sustitución en el término con número de Gödel y a todas las instancias libres de la variable con número de Gödel v por la expresión con número de Gödel u
- $\text{Num}(y)$: la función que asigna el número de Gödel del numeral \bar{y}
- $D(u)$: la **función diagonal**, si u es el número de Gödel de una fórmula $\mathcal{B}(x_1)$, devuelve el número de Gödel de $\mathcal{B}(\bar{u})$
- $\text{Prf}(y)$: y es el número de Gödel de una demostración
- $D(y, x)$: y es el número de Gödel de una demostración de la fórmula cuyo número de Gödel es x

Si tenemos un vocabulario recursivo y un conjunto de axiomas recursivos, tendremos que las siguientes son recursivas:

- $\text{Sub}(y, u, v)$: la función que asigna el número de Gödel de la sustitución en el término con número de Gödel y a todas las instancias libres de la variable con número de Gödel v por la expresión con número de Gödel u
- $\text{Num}(y)$: la función que asigna el número de Gödel del numeral \bar{y}
- $\text{D}(u)$: la **función diagonal**, si u es el número de Gödel de una fórmula $\mathcal{B}(x_1)$, devuelve el número de Gödel de $\mathcal{B}(\bar{u})$
- $\text{Prf}(y)$: y es el número de Gödel de una demostración
- $\text{D}(y, x)$: y es el número de Gödel de una demostración de la fórmula cuyo número de Gödel es x

Cuando tengamos una expresión \mathcal{C} cuyo número de Gödel es q , al numeral \bar{q} lo denotaremos por $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$.

El Teorema de Incompletitud de Gödel: El límite donde la Matemática se encuentra consigo misma

Parte III

I Escuela MADATOP Matemática, Datos y Optimización

Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral

2026

Hardly anything more unfortunate can befall a scientific writer than to have one of the foundations of his edifice shaken after the work is finished.

Frege, F.

El teorema de incompletitud de Gödel

Terminología

Un **sistema formal** (o **teoría**) es un conjunto de axiomas y de reglas lógicas que permiten desarrollar las demostraciones.

Una teoría es **consistente** si no existe un enunciado \mathcal{A} tal que tanto \mathcal{A} como $\neg\mathcal{A}$ son teoremas de la teoría.

Una teoría es **completa** si cualquiera sea el enunciado \mathcal{A} que se considere, \mathcal{A} o su negación $\neg\mathcal{A}$ es un teorema del sistema.

Gödel

En 1931, en *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas relacionados*, Gödel anticipaba la imposibilidad del propósito formalista:

En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que por el contrario [...] existen problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos en base a los axiomas (y reglas) [...]



Kurt Gödel

Kurt Friedrich Gödel
(1906-1978)

El primer teorema de incompletitud de Gödel

Gödel-Rosser (1936)

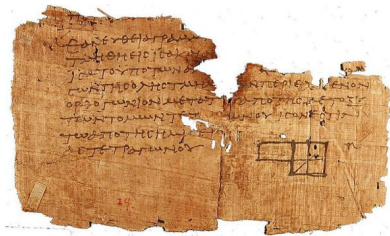
En toda teoría formal consistente que capture las nociones básicas de la aritmética se puede construir una afirmación aritmética que no es demostrable ni refutable en el mismo sistema. Es decir, la teoría es incompleta.

En particular, puede exhibirse un enunciado verdadero y no demostrable dentro del sistema. Es decir,

verdadero \neq demostrable

Lo verdadero y lo demostrable

El teorema de Gödel trata de la distancia, y la diferencia, entre **la verdad en Matemática** y **la parte de verdad que puede demostrarse**. En otras disciplinas es claro que lo verdadero no necesariamente coincide con lo demostrable.



Hay una verdad, pero el método, a veces, es insuficiente para probarla de acuerdo a la exigencia de sus propios protocolos.

Ideas informales sobre la demostración

La demostración del teorema de incompletud consiste en

- **Codificar** las fórmulas, teoremas y demostraciones de la teoría:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fórmulas, teoremas} \\ \text{y demostraciones} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Gödel}]{\text{Números de}} \mathbb{N}$$

- Mostrar que “*ser demostrable*” es una propiedad que puede traducirse en un enunciado del lenguaje de la aritmética.
- Construir un enunciado **autorreferencial** \mathcal{A} que *diga* de sí mismo “*no soy demostrable*”.
- **Contradecir** la consistencia a partir de suponer que \mathcal{A} o $\neg\mathcal{A}$ son teoremas.



Resultado clave

Construir un enunciado autorreferencial es posible gracias a un resultado que se prueba aplicando la función diagonal, que devuelve un número de Gödel.

Si todas las funciones recursivas son representables en una teoría con igualdad K en \mathcal{L}_A y $\mathcal{E}(x)$ es una fórmula cuya única variable libre es x , existe un enunciado \mathcal{C} tal que

$$\vdash_K \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{C} \urcorner).$$

Hay que elegir $\mathcal{E}(x)$ apropiadamente.

Si $\mathcal{E}(x)$ es $x = 0$ en S , entonces existe un enunciado \mathcal{C} tal que

$$\vdash_S \mathcal{C} \leftrightarrow \ulcorner \mathcal{C} \urcorner = \bar{0},$$

que puede pensarse como: \mathcal{C} dice de sí mismo que su número de Gödel es 0.

Enunciado autorreferencial

La relación $D(y, x)$: y es el código de una demostración en K de la fórmula cuyo número de Gödel es x es expresable por una fórmula $\mathcal{D}(y, x)$.

De tomar $\mathcal{E}(x)$ como $\neg\exists y\mathcal{D}(y, x)$ y aplicar \dots existe \mathcal{C} tal que $\vdash_K \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{C} \urcorner)$ el resultado anterior, se garantiza la existencia de un enunciado \mathcal{G} tal que

$$\vdash_K \mathcal{G} \leftrightarrow \neg\exists y\mathcal{D}(y, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \quad (\blacklozenge)$$

\mathcal{G} es equivalente a la afirmación $\neg\exists y\mathcal{D}(y, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$, que dice que ningún natural es el código de una demostración de \mathcal{G} en K ; i.e., que no existe una demostración de \mathcal{G} en K . Sencillamente, \mathcal{G} dice “no soy demostrable en K ”.

\mathcal{G} es el que se conoce como **enunciado de Gödel**.

El teorema de incompletitud

Si K es una teoría con igualdad en \mathcal{L}_A que es ω -consistente, entonces es incompleta, ya que ni $\vdash_K \mathcal{G}$ ni $\vdash_K \neg\mathcal{G}$.

La ω -consistencia es un requisito sintáctico que se interpreta como

en K no se pueden demostrar afirmaciones falsas.

Esto significa que si $\mathcal{B}(x)$ una fórmula tal que $\neg\mathcal{B}(\bar{0})$, $\neg\mathcal{B}(\bar{1})$, $\neg\mathcal{B}(\bar{2})$, ... son teoremas de K , entonces $(\exists x)\mathcal{B}(x)$ no es demostrable en K . La ω -consistencia de una teoría implica su consistencia.

La demostración

Si K es una teoría con igualdad en \mathcal{L}_A que es ω -consistente, entonces es incompleta, ya que ni $\vdash_K \mathcal{G}$ ni $\vdash_K \neg\mathcal{G}$.

Supongamos que \mathcal{G} es un teorema de K , $q = \ulcorner \mathcal{G} \urcorner$ y r el código de una demostración de \mathcal{G} en K . Entonces $D(r, q)$, con lo cual $\vdash_K \mathcal{D}(\bar{r}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$.

La demostración

Si K es una teoría con igualdad en \mathcal{L}_A que es ω -consistente, entonces es incompleta, ya que ni $\vdash_K \mathcal{G}$ ni $\vdash_K \neg \mathcal{G}$.

Supongamos que \mathcal{G} es un teorema de K , $q = \ulcorner \mathcal{G} \urcorner$ y r el código de una demostración de \mathcal{G} en K . Entonces $D(r, q)$, con lo cual $\vdash_K \mathcal{D}(\bar{r}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$.

Pero

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1. $\vdash_K \mathcal{G}$ | Hipótesis |
| 2. $\vdash_K \mathcal{G} \leftrightarrow \neg \exists y \mathcal{D}(y, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ | (\blacklozenge) |
| 3. $\vdash_K \neg \exists y \mathcal{D}(y, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ | 1, 2 y eliminación del bicondicional |
| 4. $\vdash_K \forall y \neg \mathcal{D}(y, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ | definición de \forall en 3. |
| 5. $\vdash_K \neg \mathcal{D}(\bar{r}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ | Regla A4 en 4. |

lo que contradice la consistencia de K .

Por lo tanto, \mathcal{G} no es un teorema de K .

La demostración

Si K es una teoría con igualdad en \mathcal{L}_A que es ω -consistente, entonces es incompleta, ya que ni $\vdash_K \mathcal{G}$ ni $\vdash_K \neg\mathcal{G}$.

Supongamos que $\neg\mathcal{G}$ es un teorema de K .

1. $\vdash_K \neg\mathcal{G}$ Hipótesis
2. $\vdash_K \mathcal{G} \leftrightarrow \neg\exists y \mathcal{D}(y, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ (\blacklozenge)
3. $\vdash_K (\exists y) \mathcal{D}(y, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ 1, 2 y eliminación del bicondicional

Siendo K consistente, \mathcal{G} no es un teorema de K . Así,

$$\neg\mathcal{D}(\bar{0}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner), \neg\mathcal{D}(\bar{1}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner), \neg\mathcal{D}(\bar{2}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner), \neg\mathcal{D}(\bar{3}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner), \dots$$

Luego, en vista de la ω -consistencia, $(\exists y) \mathcal{D}(y, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ no es un teorema de K .

Esta contradicción implica que $\neg\mathcal{G}$ no es un teorema de K .

Ejemplos y comentarios finales

Ejemplo

¿A cuántas personas hay que invitar a una fiesta para que al menos n invitados se conozcan entre sí o bien sean completamente extraños?

Quizás resulte familiar el resultado cuando $n = 3$. Hacen falta 6 personas.

Ramsey: El patrón *todos conocidos* o *todos desconocidos* siempre se puede encontrar en reuniones suficientemente numerosas.

ON A PROBLEM OF FORMAL LOGIC

By F. P. RAMSEY.

[Received 28 November, 1928.—Read 13 December, 1928.]

This paper is primarily concerned with a special case of one of the leading problems of mathematical logic, the problem of finding a regular procedure to determine the truth or falsity of any given logical formula*. But in the course of this investigation it is necessary to use certain theorems on combinations which have an independent interest and are most conveniently set out by themselves beforehand.

Ejemplo

Jeff Paris y Leo Harrington mostraron en 1977 que es posible hallar la cantidad de invitados para que exista un subgrupo **grande** de n personas que respete el patrón (*todos conocidos o todos desconocidos*).

Un conjunto de números es **grande** si tiene al menos tantos elementos como el valor de su número más pequeño. Por ejemplo, $\{3, 15, 25, 26\}$ es grande, pero $\{100, 101, 102\}$ no.

A pesar de tratarse de una afirmación relativamente simple de un problema de combinatoria que puede expresarse en la aritmética de Peano, el problema no se puede demostrar dentro de esa teoría.

Límites y malentendidos

El teorema es aplicable cuando la teoría satisface requisitos específicos.

Gödel-Rosser (1936)

En toda teoría formal consistente que capture las nociones básicas de la aritmética se puede construir una afirmación aritmética que no es demostrable ni refutable en el mismo sistema. Es decir, la teoría es incompleta.

La *aritmética de Presburger* (1929), es un sistema que incluye a los números naturales con la suma como única operación, es consistente y completa.

El teorema de incompletitud no es aplicable porque esta teoría no “captura las nociones básicas de la aritmética”. En ella no se puede definir, por ejemplo,




- la multiplicación $x \cdot y$ (pero sí $c \cdot x = \overbrace{x + x + \dots + x}^{c \text{ veces}}$).
- la noción de número primo.

Límites y malentendidos

- Del teorema de incompletitud de Gödel no se puede concluir que haya afirmaciones matemáticas verdaderas pero indemostrables en un sentido absoluto. La noción de demostrabilidad es relativa a un sistema formal.
- Debido al teorema de incompletitud, no hay un sistema formal con un conjunto finito de reglas y axiomas que sea consistente y completo del cual puedan obtenerse **todos** los teoremas matemáticos.

Muchas gracias

Para seguir leyendo

-  Franzén, T. *Gödel's theorem: an incomplete guide to its use and abuse*. A.K. Peters. 2005.
-  Martínez, G., Piñeiro. G. *Gödel \forall (para todos)*. Seix Barral. 2009.
-  Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall. 1997.