

Una breve introducción a los pesos de Muckenhoupt

Rocío Ayala y Fabio Berra

CONICET - Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Escuela MaDatOp - Mayo de 2026

1. Introducción y preliminares

Este curso está pensado para introducir las clases A_p de Muckenhoupt y algunas de sus propiedades más relevantes. Dado que se trata de un curso corto destinado, en principio, a estudiantes con poco o ningún conocimiento sobre las bases del Análisis Armónico, el enfoque será superficial y haremos mayor hincapié en la motivación que da origen a estas clases de pesos. Si bien se utilizarán algunas nociones elementales de teoría de la medida, el estudiante que no esté familiarizado con estas ideas puede igualmente entender los conceptos fundamentales que abordaremos.

Para comenzar daremos algunas definiciones y notación que serán utilizados a lo largo de estas notas.

- Una función es *localmente integrable* sobre \mathbb{R}^n si es integrable sobre cada conjunto compacto de \mathbb{R}^n . Simbolizaremos con L^1_{loc} al conjunto de funciones medibles y localmente integrables en \mathbb{R}^n .
- Un *peso* w es una función no negativa y localmente integrable tal que $0 < w(x) < \infty$ para casi todo x en \mathbb{R}^n , esto es, permitiremos únicamente que $w(x) = 0$ o $w(x) = \infty$ en conjuntos de medida nula. Si w es un peso y $1/w$ es localmente integrable, entonces $1/w$ también es un peso.
- Dados un peso w y un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, utilizaremos la notación $w(E) = \int_E w$.

Cuando $w = 1$ escribiremos $|E| = \int_E dx$ para denotar a la medida de Lebesgue del conjunto E . Con χ_E denotaremos a la función característica de E .

- Dados $1 \leq p < \infty$ y un peso w , el espacio $L^p(w)$ es el conjunto

$$L^p(w) = \left\{ f \text{ medible} : \int |f|^p w < \infty \right\}.$$

Si $f \in L^p(w)$ su norma viene dada por

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}.$$

Cuando $w = 1$ escribiremos simplemente $L^p(w) = L^p$.

Con p' denotaremos al exponente conjugado de p , esto es, el número que satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Despejando de esta identidad, tenemos que $p' = p/(p-1)$ y además es fácil ver que se cumplen las siguientes igualdades

$$\frac{p'}{p} = p' - 1 \quad \text{y también} \quad (p-1)(p'-1) = 1.$$

- (Desigualdad de Hölder) Si E es un conjunto medible y $1 < p < \infty$, entonces para $f \in L^p(E)$ y $g \in L^{p'}(E)$ se cumple que

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}.$$

- Como consecuencia de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\left(\frac{1}{|E|} \int_E f \right)^p \leq \frac{1}{|E|} \int_E f^p,$$

para todo $p \geq 1$, todo conjunto medible y acotado E y toda f no negativa tal que $f \in L^p(E)$. Este resultado se conoce como *desigualdad de Jensen*.

- Dados $1 \leq p < \infty$ y un peso w , el espacio $L^{p,\infty}(w)$ es el conjunto

$$L^{p,\infty}(w) = \{f \text{ medible} : [f]_{p,w} < \infty\},$$

siendo

$$[f]_{p,w} = \left(\sup_{\lambda > 0} \lambda^p w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}) \right)^{1/p}$$

una seminorma definida en este espacio. Si $w = 1$ escribiremos directamente $L^{p,\infty}(w) = L^{p,\infty}$.

Tenemos que $L^p(w) \subsetneq L^{p,\infty}(w)$. En efecto, para ver la contención observemos que si $f \in L^p(w)$ entonces para $\lambda > 0$

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}) = \int_{\{|f|>\lambda\}} w(x) dx \leq \int_{\{|f|>\lambda\}} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^p w(x) dx \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx.$$

Entonces

$$(\lambda^p w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}))^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}$$

para todo $\lambda > 0$. Tomando el supremo sobre $\lambda > 0$ resulta

$$[f]_{p,w} \leq \|f\|_{L^p(w)}.$$

Es decir, si $f \in L^p(w)$ entonces $\|f\|_{L^p(w)} < \infty$ y por la desigualdad de arriba resulta $[f]_{p,w} < \infty$, con lo cual $f \in L^{p,\infty}(w)$.

Para ver que esta contención es estricta, considerar $w = 1$ y observar que $g(x) = |x|^{-n/p}$ pertenece a $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ pero no a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En Análisis Armónico es común preguntarse qué propiedades de continuidad o suavidad verifican ciertos operadores. En general, si \mathcal{T} es un operador actuando sobre una función f , queremos estudiar el comportamiento de $\mathcal{T}f$ en términos del “tamaño” de f . Por ejemplo, es común estudiar una desigualdad del estilo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx,$$

donde $1 < p < \infty$ y w es una función no negativa llamada *peso*. Esta estimación se conoce como *desigualdad de tipo fuerte (p,p) con peso w*, y puede reescribirse también de la siguiente manera

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)}$$

en términos de la norma p respecto de w .

Otro tipo de estimación que aparece con frecuencia es la siguiente

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|w(x) dx,$$

conocida como *desigualdad de tipo débil* (1,1) con peso w para \mathcal{T} . Recordando la seminorma en $L^{1,\infty}(w)$, ésta puede reescribirse como

$$[\mathcal{T}f]_{1,w} \leq C\|f\|_{L^1(w)}.$$

Este tipo de desigualdades establecen un control del tamaño de $\mathcal{T}f$ en términos del de la función f . La idea de tamaño aquí viene expresada en términos de una norma en $L^p(w)$ o de la seminorma en $L^{1,\infty}(w)$.

Por otra parte, muchas veces esta noción de control se establece con desigualdades como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{\mathcal{T}}f(x))^p w(x) dx,$$

donde $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ es un *operador maximal* que guarda relación con \mathcal{T} , y que en general es más sencillo de estudiar.

Uno de los operadores maximales elementales en Análisis Armónico es el *operador maximal de Hardy-Littlewood centrado* M_c definido por

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

con $f \in L^1_{\text{loc}}$ y donde $B(x,r)$ representa la bola euclídea de \mathbb{R}^n con centro en x y radio $r > 0$, esto es

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}.$$

El término “centrado” hace referencia a que el supremo se toma sobre todas las bolas centradas en el punto x . También podemos definir una versión no centrada de este operador

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre cualquier bola B tal que $x \in B$. Es posible (y relativamente sencillo) demostrar que M y M_c son *equivalentes*, es decir, las desigualdades

$$M_c f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n M_c f(x)$$

se satisfacen para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como consecuencia del teorema de diferenciación de Lebesgue también es posible demostrar que

$$|f(x)| \leq Mf(x)$$

para casi todo punto x tal que $Mf(x) < \infty$.

Es bien conocido (véase por ejemplo [1] o [2]) que el operador maximal M es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p < \infty$. Es decir, existe una constante $C = C(p)$ tal que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \tag{1.1}$$

vale para toda $f \in L^p$. Esto significa que M es un operador acotado en L^p . Sin embargo, la desigualdad anterior no es cierta cuando $p = 1$: en efecto, si $f \in L^1$ y no es idénticamente cero, entonces existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B(0,R)} |f| \geq c > 0.$$

Por otro lado, si $|x| > R$ entonces $B(0, R) \subseteq B(x, 2|x|)$, y en consecuencia

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(x, 2|x|)} |f| \geq \frac{1}{|B(x, 2|x|)|} \int_{B(0, R)} |f| \geq \frac{c}{|B(x, 2|x|)|} = \frac{C_n}{|x|^n},$$

que no es integrable.

En cambio, cuando $p = 1$ se prueba (véase también [1] o [2]) que existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \quad (1.2)$$

vale para todo $\lambda > 0$, lo cual establece que M es de tipo débil $(1, 1)$.

Ejemplo 1 (Maximal de una función característica). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f(x) = \chi_{[a, b]}(x)$. Calcular $M_c f(x)$ y comprobar que se cumplen las desigualdades (1.1) y (1.2).

Fijemos $x \in \mathbb{R}$. Vamos a dividir la estimación en diferentes casos.

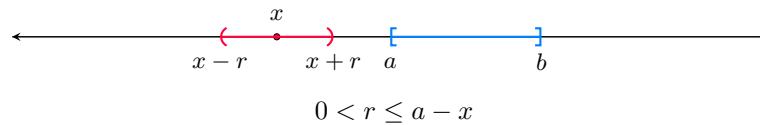
Caso 1 $x < a$. En este caso tenemos que $a - x > 0$.

- Si $0 < r \leq a - x$, entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \emptyset$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 0 dt = 0.$$

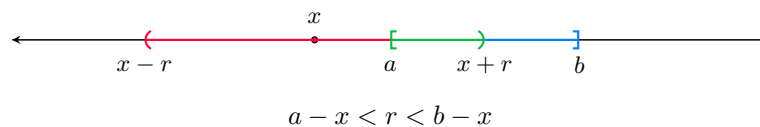


- Si $a - x < r < b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^{x+r} 1 dt = \frac{x+r-a}{2r} = \frac{1}{2} - \frac{a-x}{2r}.$$

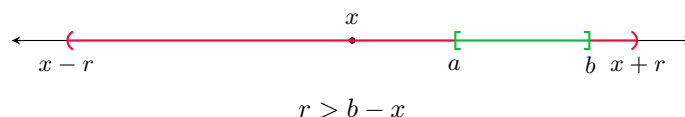


- Si $r \geq b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} [a, b) & \text{si } r = b - x, \\ [a, b] & \text{si } r > b - x. \end{cases}$$

Cualquiera sea el caso resulta

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b-a}{2r}.$$



Recapitulando, para el caso $x < a$ hemos obtenido que

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r \leq a - x \\ \frac{1}{2} - \frac{a-x}{2r} & \text{si } a - x < r < b - x \\ \frac{b-a}{2r} & \text{si } r \geq b - x. \end{cases}$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta que

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{b-a}{2(b-x)}.$$

Caso 2 $a \leq x \leq b$. Aquí consideraremos diferentes subcasos.

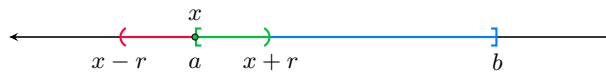
Caso 2.1 $x = a$.

- Si $0 < r < b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r] = [a, a + r].$$

De esta forma

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^{a+r} 1 dt = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$



$$0 < r < b - a$$

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} [a, b] & \text{si } r = b - a, \\ [a, b] & \text{si } r > b - a. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b-a}{2r}.$$



$$r \geq b - a$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta que

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2}.$$

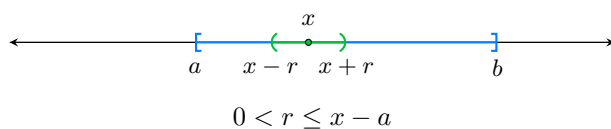
Caso 2.2 $a < x < (a + b)/2$.

- Si $0 < r \leq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, x + r)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1 dt = \frac{2r}{2r} = 1.$$

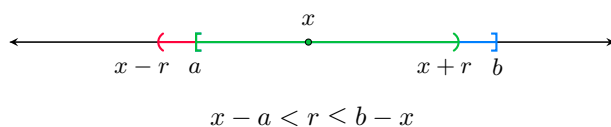


- Si $x - a < r \leq b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^{x+r} 1 dt = \frac{1}{2} + \frac{x-a}{2r} < 1.$$

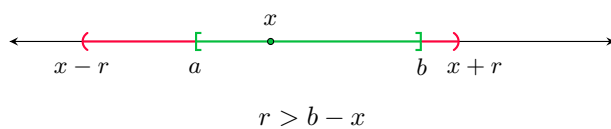


- Si $r > b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$

y resulta

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



Al tomar supremo sobre $r > 0$ en este caso obtenemos

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = 1.$$

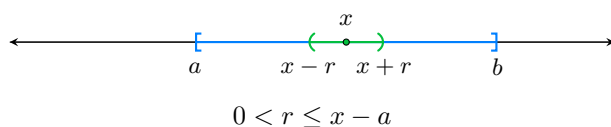
Caso 2.3 $x = (a + b)/2$.

- Si $0 < r \leq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, x + r)$$

con lo cual

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1 dt = \frac{2r}{2r} = 1.$$

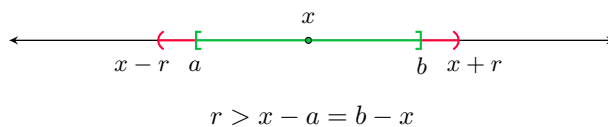


- Si $r > x - a = b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt = 1.$$

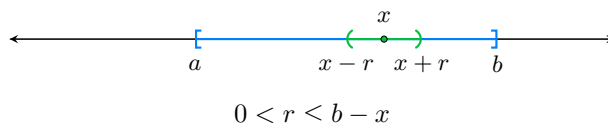
Caso 2.4 $(a+b)/2 < x < b$.

- Si $0 < r \leq b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, x + r)$$

con lo cual

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1 dt = \frac{2r}{2r} = 1.$$

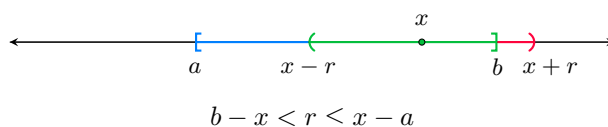


- Si $b - x < r \leq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b]$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^b 1 dt = \frac{1}{2} + \frac{b-x}{2r} < 1.$$

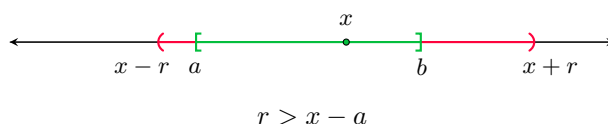


- Si $r > x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$

y resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



Al tomar supremo sobre $r > 0$ en este caso obtenemos

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt = 1.$$

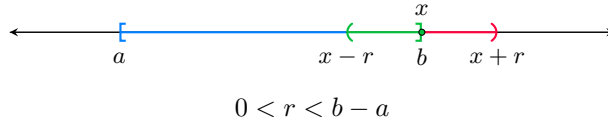
Caso 2.5 $x = b$.

- Si $0 < r < b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b] = (b - r, b].$$

De esta forma

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{b-r}^b 1 dt = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

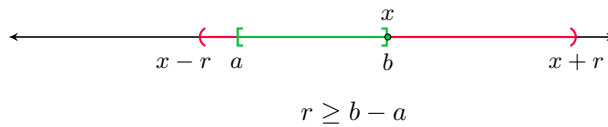


- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} (a, b] & \text{si } r = b - a, \\ [a, b] & \text{si } r > b - a. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b - a}{2r}.$$



Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta que

$$\sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2}.$$

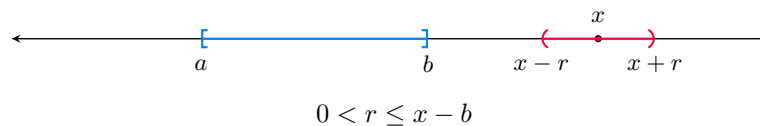
Caso 3 $x > b$. En este caso tenemos que $x - b > 0$.

- Si $0 < r \leq x - b$, entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \emptyset$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 0 dt = 0.$$

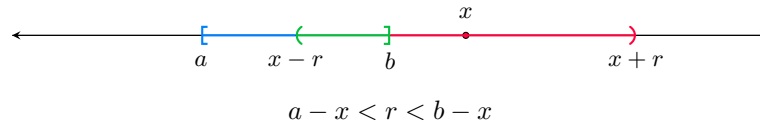


- Si $x - b < r < x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b]$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^b 1 dt = \frac{b - x + r}{2r} = \frac{1}{2} - \frac{x - b}{2r}.$$

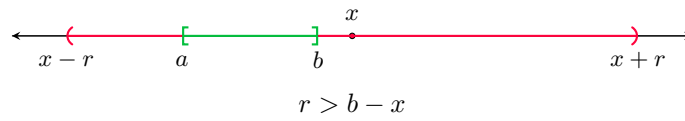


■ Si $r \geq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} (a, b) & \text{si } r = x - a, \\ [a, b] & \text{si } r > x - a \end{cases}$$

y en este caso simplemente resulta

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1 dt = \frac{b - a}{2r}.$$



Para este tercer caso hemos obtenido entonces que

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r \leq x - b \\ \frac{1}{2} - \frac{x-b}{2r} & \text{si } x - b \leq r \leq x - a \\ \frac{b-a}{2r} & \text{si } r > x - a. \end{cases}$$

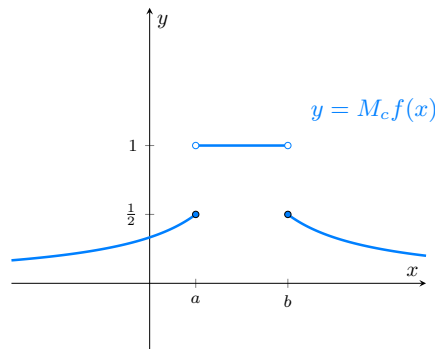
Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta

$$\sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t)| dt = \frac{b - a}{2(x - a)}.$$

De esta manera resulta

$$M_c f(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)} & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } a < x < b, \\ \frac{b-a}{2(x-a)} & \text{si } x \geq b, \end{cases}$$

y en la siguiente figura podemos observar el gráfico de $M_c f$ como una función de x .



Para finalizar este ejemplo, vamos a comprobar que se satisfacen las desigualdades (1.1) y (1.2).

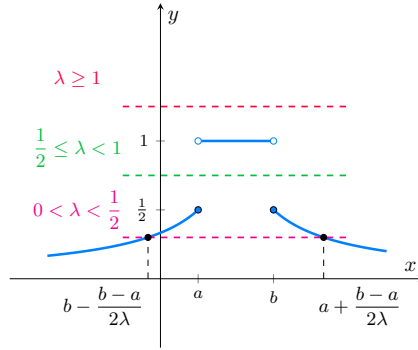
Si $1 < p < \infty$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (M_c f(x))^p dx &= \int_{-\infty}^a \frac{(b-a)^p}{2^p(b-x)^p} dx + \int_a^b 1^p dx + \int_b^{\infty} \frac{(b-a)^p}{2^p(x-a)^p} dx \\
&= \frac{b-a}{2^p(p-1)} + (b-a) + \frac{b-a}{2^p(p-1)} \\
&= \frac{2^{p-1}(p-1) + 1}{2^{p-1}(p-1)} (b-a) \\
&= C_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

Es decir, se cumple (1.1) (de hecho, en este caso es una igualdad).

Por otro lado, para $\lambda > 0$ tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R} : M_c f(x) > \lambda\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \lambda \geq 1, \\ (a, b) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1, \\ \left(b - \frac{b-a}{2\lambda}, a + \frac{b-a}{2\lambda}\right) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Entonces

$$\lambda |\{x \in \mathbb{R} : M f(x) > \lambda\}| = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 1, \\ \lambda(b-a) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1, \\ (b-a)(1-\lambda) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Y en consecuencia

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R} : M f(x) > \lambda\}| = b-a = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

lo que nos indica que se verifica (1.2) (en este caso, también como igualdad).

2. Definición de la clase A_p

Ahora centraremos nuestra atención en introducir las clases de pesos A_p . En la década de 1970, Benjamin Muckenhoupt ([4]) resolvió el problema de caracterizar los pesos w que cumplen la acotación fuerte del operador M

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M f(x))^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \tag{2.1}$$

para $1 < p < \infty$, así como también encontrar los pesos tales que la desigualdad de tipo débil

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx \tag{2.2}$$

sea cierta para todo $\lambda > 0$. Este trabajo dio origen a las clases de pesos A_p que llevan su nombre. Observar que estas desigualdades son las correspondientes estimaciones (1.1) y (1.2) donde ahora aparece la función peso w .

2.1. Caso $1 < p < \infty$

Para motivar las definiciones de esta sección, supongamos que w es un peso que satisface alguna de estas desigualdades para el operador M . Comencemos fijando $1 < p < \infty$ y supongamos que (2.1) vale para toda función $f \in L^p(w)$. Si B es cualquier bola de \mathbb{R}^n , aplicamos la desigualdad (2.1) con $f\mathcal{X}_B$, con lo cual

$$w(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f| \right)^p \leq \int_B (M(f\mathcal{X}_B))^p w \leq \int_{\mathbb{R}^n} (M(f\mathcal{X}_B))^p w \leq C \int_B |f|^p w,$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f| \right)^p \leq \frac{C}{w(B)} \int_B |f|^p w,$$

para toda $f \in L^p(w)$ y toda bola B . Sean $\varepsilon > 0$ y $f = (w + \varepsilon)^{-p'/p} \mathcal{X}_B$. En este caso, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B (w + \varepsilon)^{-p'/p} \right)^p \left(\frac{1}{|B|} \int_B \frac{w}{(w + \varepsilon)^{p'}} \right)^{-1} \leq C.$$

Dado que $w \leq w + \varepsilon$ y $-p'/p = 1 - p'$, esto implica también que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B (w + \varepsilon)^{-p'/p} \right)^{p-1} \leq C,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ y utilizando el teorema de la convergencia monótona, concluimos que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} \leq C. \quad (2.3)$$

Hemos demostrado entonces que la acotación fuerte en $L^p(w)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood (2.1) implica la desigualdad (2.3). De hecho, Muckenhoupt demostró que ambas condiciones son equivalentes.

Definición (Clase A_p , $1 < p < \infty$)

Dado $1 < p < \infty$, decimos que w pertenece a la clase A_p de Muckenhoupt si

$$[w]_{A_p} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty.$$

La constante $[w]_{A_p}$ recibe el nombre de *constante característica* A_p de w .

Observación 1. La condición A_p también puede ser reescrita en términos de normas L^p como sigue: w está en A_p si existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$|B|^{-1} \|w^{1/p} \mathcal{X}_B\|_p \|w^{-1/p} \mathcal{X}_B\|_{p'} \leq C$$

vale para toda bola B de \mathbb{R}^n . En este caso, tenemos que $[w]_{A_p} \leq C^p$.

2.2. Caso $p = 1$

Para este caso supongamos que la desigualdad de tipo débil (2.2) vale para toda función $f \in L^1(w)$. Fijada una bola B y $0 < \lambda < |B|^{-1} \int_B |f|$, es claro que

$$w(B) \leq w(\{x \in B : Mf(x) > \lambda\}) \leq w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w,$$

con C independiente de λ . Haciendo $\lambda \rightarrow |B|^{-1} \int_B |f|$ obtenemos

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq \frac{C}{w(B)} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w. \quad (2.4)$$

Recordemos que el ínfimo esencial de w sobre un conjunto medible E es

$$\inf_E w = \sup\{b : |\{x \in E : w(x) < b\}| = 0\}$$

y el supremo esencial de w sobre E

$$\sup_E w = \inf\{b : |\{x \in E : w(x) > b\}| = 0\}.$$

Sean $a > \inf_B w$ y $S_a = \{x \in B : w(x) < a\}$. Entonces $|S_a| > 0$ y aplicando (2.4) con $f = \chi_{S_a}$ tenemos que

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \frac{w(S_a)}{|S_a|} < C a,$$

para todo $a > \inf_B w$ y C independiente de a . Al hacer $a \rightarrow \inf_B w$ obtenemos

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \inf_B w.$$

Definición (Clase A_1)

Decimos que w pertenece a la clase A_1 de Muckenhoupt si

$$[w]_{A_1} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\sup_B w^{-1} \right) < \infty.$$

La constante $[w]_{A_1}$ recibe el nombre de *constante característica A_1* de w .

Observación 2. También podemos escribir la condición A_1 de la siguiente manera: $w \in A_1$ si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$|B|^{-1} \|w \chi_B\|_1 \|w^{-1} \chi_B\|_\infty \leq C$$

vale para toda bola B de \mathbb{R}^n , donde $\|w^{-1} \chi_B\|_\infty = \sup_B w^{-1}$. En este caso tenemos que $[w]_{A_1} \leq C$. La desigualdad de arriba puede verse como el caso $p = 1$ de la mostrada en la Observación 1, ya que $p' = \infty$ cuando $p = 1$.

La siguiente proposición reúne algunas propiedades elementales de las clases A_p .

Proposición 2.1. *Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

- (a) Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subset A_q$.
- (b) Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.
- (c) Si $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ si y sólo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}$ y $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$. En particular, $w \in A_2$ si y sólo si $w^{-1} \in A_2$ y $[w]_{A_2} = [w^{-1}]_{A_2}$.
- (d) Si $u, v \in A_1$, entonces $w = uv^{1-p} \in A_p$, para todo $1 < p < \infty$.
- (e) Si $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces la medida $d\mu(x) = w(x) dx$ es duplicante: para cada $\lambda > 1$ y toda bola B tenemos que

$$w(\lambda B) \leq [w]_{A_p} \lambda^{np} w(B).$$

- (f) $w \in A_1$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que $Mw(x) \leq Cw(x)$ para casi todo punto x .

Demostración. Comencemos con el ítem (a). Como $-1 = (1 - q')(q - 1)$ para cualquier $q > 1$, observemos que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\sup_B w^{-1} \right) \geq \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-q'} \right)^{q-1}.$$

Por lo tanto, si $w \in A_1$

$$\infty > [w]_{A_1} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\sup_B w^{-1} \right) \geq \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-q'} \right)^{q-1} = [w]_{A_q}$$

Esto nos dice que $A_1 \subseteq A_q$ y $[w]_{A_1} \geq [w]_{A_q}$.

Si $1 < p < q$, entonces por la desigualdad de Jensen es claro que para toda bola B

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-q'} \right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1}.$$

En consecuencia, si $w \in A_p$

$$\infty > [w]_{A_p} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} \geq \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-q'} \right)^{q-1} = [w]_{A_q},$$

es decir, $w \in A_q$ y $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$.

Para demostrar el ítem (b), notemos que si $1 < p < \infty$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder

$$1 = \frac{1}{|B|} \int_B w^{1/p} w^{-1/p} \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{1/p'}.$$

Elevando ambos miembros de la desigualdad al exponente p obtenemos

$$1 \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1},$$

de donde se sigue la afirmación. El caso $p = 1$ se obtiene al observar que

$$1 = \frac{1}{|B|} \int_B w w^{-1} \leq \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\sup_B w^{-1} \right).$$

La prueba de (c) es consecuencia de la siguiente igualdad

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \sigma \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \sigma^{1-p} \right)^{p'-1} = \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right)^{p'-1} = \left[\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \right]^{p'-1},$$

ya que $(1-p)(1-p') = 1$. De aquí se sigue también que $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$.

Probemos ahora el ítem (d). Si u y v están en A_1 , entonces para cualquier bola B

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B u v^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B (u v^{1-p})^{1-p'} \right)^{p-1} &= \left(\frac{1}{|B|} \int_B u v^{1-p} \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B u^{1-p'} v \right)^{p-1} \\ &\leq \left(\inf_B v \right)^{1-p} \frac{u(B)}{|B|} \left(\inf_B u \right)^{-1} \left(\frac{v(B)}{|B|} \right)^{p-1} \\ &\leq [u]_{A_1} [v]_{A_1}^{p-1}, \end{aligned}$$

ya que $u \geq \inf_B u$ y $v \geq \inf_B v$ en casi todo punto de B . Tomando supremo sobre todas las bolas de \mathbb{R}^n , obtenemos que $u v^{1-p} \in A_p$ y además $[u v^{1-p}]_{A_p} \leq [u]_{A_1} [v]_{A_1}^{p-1}$.

Para probar el ítem (e) consideremos primero $p = 1$. Dado que $w \in A_1$, fijados $\lambda > 1$ y una bola B obtenemos

$$\frac{w(\lambda B)}{|\lambda B|} \leq [w]_{A_1} \inf_{\lambda B} w \leq [w]_{A_1} \inf_B w \leq [w]_{A_1} \frac{w(B)}{|B|},$$

de donde deducimos que

$$w(\lambda B) \leq [w]_{A_1} \lambda^n w(B).$$

Sean ahora $1 < p < \infty$, $\lambda > 1$ y B una bola de \mathbb{R}^n . Combinando el hecho de que $w \in A_p$ junto con el ítem (b), tenemos que

$$\begin{aligned} w(\lambda B) &= |\lambda B|^p \frac{w(\lambda B)}{|\lambda B|} \left(\frac{w^{1-p'}(\lambda B)}{|\lambda B|} \right)^{p-1} \left(w^{1-p'}(\lambda B) \right)^{1-p} \\ &\leq [w]_{A_p} \lambda^{np} |B|^p \left(w^{1-p'}(B) \right)^{1-p} \\ &\leq [w]_{A_p} \lambda^{np} w(B). \end{aligned}$$

Para finalizar, demostremos (f). Si $w \in A_1$, entonces la desigualdad

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq [w]_{A_1} w(x) \tag{2.5}$$

vale para toda bola B y casi todo x en B . Fijemos x tal que $Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)$. Entonces existe una bola B_x con radio racional que contiene a x y tal que

$$\frac{w(B_x)}{|B_x|} > [w]_{A_1} w(x).$$

En virtud de (2.5), x debe estar en un subconjunto de B_x de medida nula. Luego $\{x : Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$, siendo N_j conjuntos medibles de medida cero. Por lo tanto, $Mw(x) \leq [w]_{A_1} w(x)$ en casi todo punto x .

Recíprocamente, si $Mw(x) \leq Cw(x)$ en casi todo punto x , entonces vale (2.5) con $[w]_{A_1}$ reemplazada por C y para casi todo punto de B , que es equivalente a que

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \inf_B w. \quad \square$$

En la siguiente proposición mostraremos que los pesos de tipo potencia $w(x) = |x|^a$ están en A_p bajo cierta relación entre a y p .

Proposición 2.2. Sean $a \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ y $w(x) = |x|^a$. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si $-n < a < n(p-1)$. Además, $w \in A_1$ si y sólo si $-n < a \leq 0$.

Demostración. Fijemos $1 < p < \infty$ y $-n < a < n(p-1)$. Vamos a dividir las bolas de \mathbb{R}^n en dos conjuntos

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x_B, r) : |x_B| \leq 3r\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{B(x_B, r) : |x_B| > 3r\}.$$

Si $B \in \mathcal{B}_1$, entonces $B \subseteq B_0$ siendo $B_0 = B(0, 4r)$. En efecto, si $y \in B$ entonces

$$|y| \leq |y - x_B| + |x_B| < r + 3r = 4r$$

y también $4^n |B| = |B_0|$. Transformando a coordenadas polares y utilizando que $a+n$ y $a(1-p') + n$ son números positivos obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^{a(1-p')} dx \right)^{p-1} &\leq \left(\frac{4^n}{|B_0|} \int_{B_0} |x|^a dx \right) \left(\frac{4^n}{|B_0|} \int_{B_0} |x|^{a(1-p')} dx \right)^{p-1} \\ &\leq \frac{C}{r^{np}} \left(\int_0^{4r} \rho^{a+n-1} d\rho \right) \left(\int_0^{4r} \rho^{a(1-p')+n-1} d\rho \right)^{p-1} \\ &\leq \frac{C}{r^{np}} \frac{(4r)^{a+n}}{a+n} \left(\frac{(4r)^{a(1-p')+n}}{a(1-p')+n} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{r^{np}} r^{a+n+a(1-p')(p-1)+n(p-1)} \\ &= C_1. \end{aligned}$$

Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$. En efecto, para todo $x \in B$ tenemos que

$$|x_B| - r \leq |x| \leq |x_B| + r$$

lo cual implica que

$$\frac{2}{3}|x_B| \leq |x| \leq \frac{4}{3}|x_B|.$$

En este caso, simplemente escribimos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^{a(1-p')} dx \right)^{p-1} &\leq C |x_B|^a |x_B|^{a(1-p')(p-1)} \\ &= C |x_B|^{a-a} \\ &= C_2, \end{aligned}$$

dado que $(1-p')(p-1) = -1$. Tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$ obtenemos que

$$\sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^{a(1-p')} dx \right)^{p-1} \leq C,$$

lo que prueba que $w \in A_p$.

Supongamos ahora que $w(x) = |x|^a$ está en A_p , para $1 < p < \infty$. Entonces para toda bola B de \mathbb{R}^n tenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^{a(1-p')} dx \right)^{p-1} \leq [w]_{A_p}.$$

Como cada factor del lado izquierdo es positivo, entonces necesariamente ambos deben ser finitos, para cada bola B de \mathbb{R}^n . En particular, tomando cualquier bola centrada en el origen, la finitud de las integrales implica que $a > -n$ y que $a(1-p') > -n$, de donde podemos deducir que $-n < a < n(p-1)$.

Para terminar, veamos el caso $p = 1$. Supongamos que $-n < a \leq 0$. Si $B = B(x_B, r)$ es una bola en \mathcal{B}_1 entonces $B \subseteq B_0$, donde $B_0 = B(0, 4r)$. Entonces

$$\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \leq \frac{4^n}{|B_0|} \int_{B_0} |x|^a dx = \frac{C}{r^n} r^{a+n} = Cr^a = C \inf_{B_0} |x|^a \leq C_1 \inf_B |x|^a,$$

dado que $|x|^a$ es radialmente decreciente y $B \subseteq B_0$.

Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$ y en consecuencia

$$\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \leq C |x_B|^a = C_2 \inf_B |x|^a.$$

Eligiendo nuevamente $C = \max\{C_1, C_2\}$ tenemos que

$$\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \leq C \inf_B |x|^a,$$

para toda bola $B \subseteq \mathbb{R}^n$. En consecuencia, $w \in A_1$.

Recíprocamente, si $w \in A_1$ entonces para cualquier bola de \mathbb{R}^n se cumple

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a dx \right) \sup_B |x|^{-a} \leq [w]_{A_1}.$$

Como cada factor del lado izquierdo es positivo, ambos deben ser finitos. De la finitud del promedio obtenemos, como antes, que $a > -n$. La finitud del supremo esencial implica que $-a$ debe ser no negativo, esto es, $a \leq 0$. El resultado queda probado. \square

3. Otras propiedades importantes

Como hemos visto en estas notas, la clase A_p de Muckenhoupt cumple muchas propiedades interesantes. Si bien un curso básico sobre estas familias de pesos obligaría a mencionar otras también muy relevantes, el formato del presente curso hace que debamos pasarlas por alto. Sin embargo, a modo informativo, mencionaremos algunas de ellas. El lector interesado puede consultar [1] o [2] para ver una demostración o detalles adicionales.

- Si $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces w satisface una *desigualdad de Hölder al revés*. Es decir, existen números $s > 1$ y $C > 0$ tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^s \right)^{1/s} \leq \frac{C}{|B|} \int_B w$$

es válida para cualquier bola B de \mathbb{R}^n . La constante C depende únicamente de la dimensión y de $[w]_{A_p}$. El nombre “Hölder al revés” se debe a que la desigualdad en sentido contrario es una inmediata consecuencia de la desigualdad de Hölder.

- Las clases A_p son *abiertas*, en el siguiente sentido: si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces existe $1 < q < p$ tal que $w \in A_q$.
- Todo peso de A_p puede factorizarse como producto de dos pesos de la clase A_1 . Concretamente, si $1 \leq p < \infty$ entonces $w \in A_p$ si y sólo si existen pesos u y v en la clase A_1 tales que $w = uv^{1-p}$. Esta relación se conoce como teorema de factorización de Jones, un importante resultado debido a Peter Jones y probado en [3]. Observar que en el ítem (d) de la Proposición 2.1 hemos demostrado una de estas implicaciones.

Referencias

- [1] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Urbe.
- [2] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004. MR 2449250
- [3] P. W. Jones, *Factorization of A_p weights*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 511–530.
- [4] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR 0293384