Una breve introducción a los pesos de Muckenhoupt

Rocío Ayala - Fabio Berra

CONICET - Facultad de Ingeniería Química

Escuela MaDatOp

Santa Fe, mayo de 2026

Contenidos

Preliminares e introducción

Comenzaremos dando algunas definiciones que resultarán útiles.

Comenzaremos dando algunas definiciones que resultarán útiles.

- Una función es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ si es integrable sobre cada conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de funciones localmente integrables es

  $$L^1_{\mathrm{loc}} = L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f : f \text{ es medible y localmente integrable}\}.$$

Preliminares e introducción

Comenzaremos dando algunas definiciones que resultarán útiles.

- Una función es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ si es integrable sobre cada conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de funciones localmente integrables es

  $$L^1_{\text{loc}} = L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f : f \text{ es medible y localmente integrable}\}.$$

- Un peso w es una función no negativa y localmente integrable tal que $0 < w(x) < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Si w es un peso y $1/w$ es localmente integrable, entonces $1/w$ también es un peso.

Preliminares e introducción

Comenzaremos dando algunas definiciones que resultarán útiles.

- Una función es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ si es integrable sobre cada conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de funciones localmente integrables es

$$L^1_{\text{loc}} = L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f : f \text{ es medible y localmente integrable}\}.$$

- Un peso w es una función no negativa y localmente integrable tal que $0 < w(x) < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- Si w es un peso y $1/w$ es localmente integrable, entonces $1/w$ también es un peso.
- Si w es un peso y E es medible, $w(E) = \int_E w$. Cuando $w = 1$ escribimos $|E| = \int_E dx$ para denotar la medida de Lebesgue de E.
- $\mathcal{X}_E$ denota la función característica de E.

Preliminares e introducción

- Espacio $L^p(w)$ Si w es un peso y $1 < p < \infty$ entonces

$$L^p(w) = \left\{ f : f \text{ es medible y} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w < \infty \right\}.$$

- Espacio $L^p(w)$ Si w es un peso y $1 < p < \infty$ entonces

$$L^p(w) = \left\{ f : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w < \infty \right\}.$$

Si $f \in L^p(w)$ su norma es

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w \right)^{1/p}.$$

Cuando $w = 1$, $L^p(w) = L^p$.

- Espacio $L^{p,\infty}(w)$ (L^p – débil) Si w es un peso y $1 \leq p < \infty$ entonces

$$L^{p,\infty}(w) = \{f \text{ medible } : [f]_{p,w} < \infty\},$$

siendo

$$[f]_{p,w} = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\right)\right)^{1/p}$$

la seminorma de f en este espacio.

Si $w = 1$, $L^{p,\infty}(w) = L^{p,\infty}$.

- Espacio $L^{p,\infty}(w)$ $(L^p-\text{débil})$ Si w es un peso y $1 \leq p < \infty$ entonces

$$L^{p,\infty}(w) = \{f \text{ medible } : [f]_{p,w} < \infty\},$$

siendo

$$[f]_{p,w} = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda^p w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\right)\right)^{1/p}$$

la seminorma de f en este espacio.

Si $w = 1$, $L^{p,\infty}(w) = L^{p,\infty}$.

Tenemos que $L^p(w) \subsetneq L^{p,\infty}(w)$.

Preliminares e introducción

Dado cierto operador $\mathcal{T}$, un problema común en Análisis Armónico es estudiar estimaciones como las siguientes

- Desigualdades de tipo fuerte con un peso w

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

Preliminares e introducción

Dado cierto operador $\mathcal{T}$, un problema común en Análisis Armónico es estudiar estimaciones como las siguientes

- Desigualdades de tipo fuerte con un peso w

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

- Desigualdades de tipo débil con un peso w

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\,dx.$$

Preliminares e introducción

Dado cierto operador $\mathcal{T}$, un problema común en Análisis Armónico es estudiar estimaciones como las siguientes

- Desigualdades de tipo fuerte con un peso w

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx$$

- Desigualdades de tipo débil con un peso w

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{T}f(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx.$$

- Estimaciones de control con peso w

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{T}f(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_{\mathcal{T}} f(x))^p w(x)\, dx,$$

donde $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ es un "operador maximal" adecuado.

El operador maximal de Hardy-Littlewood

El operador maximal de Hardy-Littlewood centrado M_c se define para $f \in L^1_{\text{loc}}$ como

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas de $\mathbb{R}^n$ centradas en el punto x, esto es

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

El operador maximal de Hardy-Littlewood centrado M_c se define para $f \in L^1_{\text{loc}}$ como

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas de $\mathbb{R}^n$ centradas en el punto x, esto es

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

La versión no centrada de este operador es

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(t)|\, dt,$$

donde ahora el supremo se toma sobre todas las posibles bolas que contienen al punto x (pudiendo éste no ser su centro).

Algunas propiedades

Algunas propiedades

- Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$M_c f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n M_c f(x)$$

con lo que M y M_c son equivalentes.

Algunas propiedades

- Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$M_c f(x) \leq M f(x) \leq 2^n M_c f(x)$$

  con lo que M y M_c son equivalentes.
- $|f(x)| \leq M_c f(x)$ en casi todo x tal que $M_c f(x) < \infty$.

Algunas propiedades

- Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$M_c f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n M_c f(x)$$

  con lo que M y M_c son equivalentes.
- $|f(x)| \leq M_c f(x)$ en casi todo x tal que $M_c f(x) < \infty$.
- Si $1 < p < \infty$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \, dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \qquad (1)$$

  para toda $f \in L^p$, es decir, M es de tipo fuerte (p, p).

Algunas propiedades

- M no es de tipo fuerte $(1,1)$.

Algunas propiedades

- M no es de tipo fuerte $(1,1)$.
- En su lugar, satisface la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \tag{2}$$

para todo $\lambda > 0$ y $f \in L^1$, es decir, es de tipo débil $(1,1)$.

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Ejemplo

Si $a < b$ y $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x)$, calcular $M_c f$ y comprobar las desigualdades (1) y (2) para este caso.

Ejemplo

Si $a < b$ y $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x)$, calcular $M_c f$ y comprobar las desigualdades (1) y (2) para este caso.

Caso 1 $x < a$. Observar que en este caso $a - x > 0$.

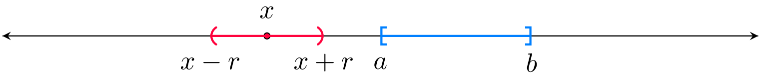
Ejemplo

Si $a < b$ y $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x)$, calcular $M_c f$ y comprobar las desigualdades (1) y (2) para este caso.

Caso 1 $x < a$. Observar que en este caso $a - x > 0$.

- Si $0 < r \leq a - x$, entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \emptyset$$



$$0 < r \leq a - x$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Ejemplo

Si $a < b$ y $f(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x)$, calcular $M_c f$ y comprobar las desigualdades (1) y (2) para este caso.

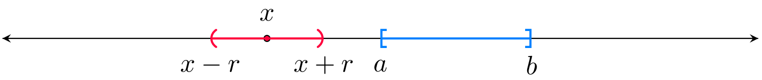
Caso 1 $x < a$. Observar que en este caso $a - x > 0$.

- Si $0 < r \leq a - x$, entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \emptyset$$

y en consecuencia

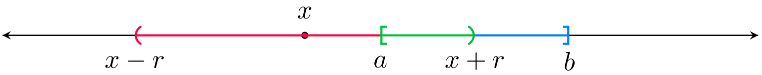
$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 0\, dt = 0.$$



$$0 < r \leq a - x$$

- Si $a - x < r < b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r)$$



$$a - x < r < b - x$$

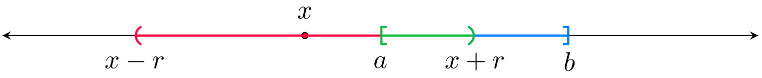
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $a - x < r < b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r)$$

por lo tanto

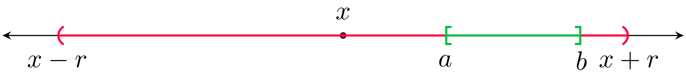
$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2r}\int_a^{x+r} 1\,dt = \frac{x+r-a}{2r} = \frac{1}{2} - \frac{a-x}{2r}.$$



$a - x < r < b - x$

- Si $r \geq b - x$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} [a,b) & \text{si } r = b - x, \\ [a,b] & \text{si } r > b - x. \end{cases}$$



$r > b - x$

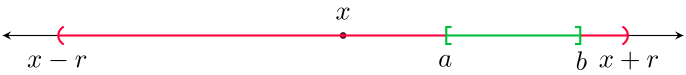
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq b - x$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} [a,b) & \text{si } r = b-x, \\ [a,b] & \text{si } r > b-x. \end{cases}$$

Cualquiera sea el caso resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r}.$$



$r > b - x$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Recapitulando, para el caso $x < a$ hemos obtenido que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < r \leq a - x \\ \frac{1}{2} - \frac{a-x}{2r} & \text{si} \quad a - x < r < b - x \\ \frac{b-a}{2r} & \text{si} \quad r \geq b - x. \end{cases}$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Recapitulando, para el caso $x < a$ hemos obtenido que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < r \leq a - x \\ \frac{1}{2} - \frac{a-x}{2r} & \text{si} \quad a - x < r < b - x \\ \frac{b-a}{2r} & \text{si} \quad r \geq b - x. \end{cases}$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta que

$$\boxed{\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \frac{b-a}{2(b-x)}.}$$

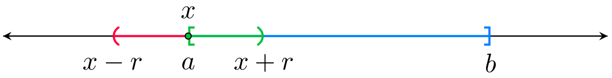
Caso 2 $a \leq x \leq b$. Este caso lo separaremos en otros subcasos.

Caso 2 $a \leq x \leq b$. Este caso lo separaremos en otros subcasos.

Caso 2.1 $x = a$.

- Si $0 < r < b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r) = [a, a + r).$$



$$0 < r < b - a$$

Caso 2 $a \leq x \leq b$. Este caso lo separaremos en otros subcasos.

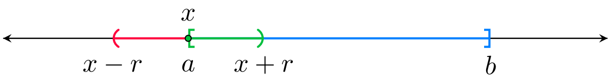
Caso 2.1 $x = a$.

- Si $0 < r < b - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = [a, x+r) = [a, a+r).$$

De esta forma

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^{a+r} 1\, dt = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

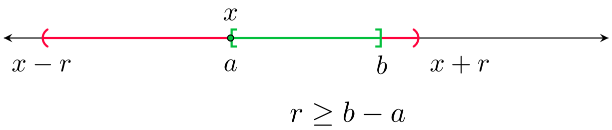


$$0 < r < b - a$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} [a, b) & \text{si } r = b - a, \\ [a, b] & \text{si } r > b - a. \end{cases}$$



El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} [a, b) & \text{si } r = b - a, \\ [a, b] & \text{si } r > b - a. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b - a}{2r}.$$

$r \geq b - a$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} [a,b) & \text{si } r = b-a, \\ [a,b] & \text{si } r > b-a. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r}.$$

$r \geq b - a$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta que

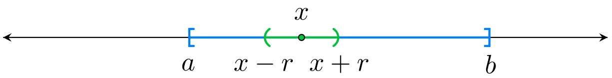
$$\boxed{\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2}.}$$

Caso 2.2 $a < x < (a + b)/2$.

Caso 2.2 $a < x < (a+b)/2$.

- Si $0 < r \leq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, x + r)$$



$$0 < r \leq x - a$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

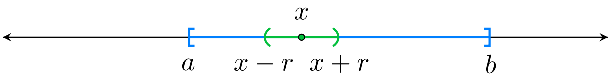
Caso 2.2 $a < x < (a+b)/2$.

- Si $0 < r \leq x - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = (x-r, x+r)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1\, dt = \frac{2r}{2r} = 1.$$

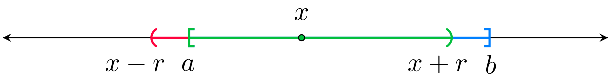


$$0 < r \leq x - a$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $x - a < r \leq b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r)$$



$$x - a < r \leq b - x$$

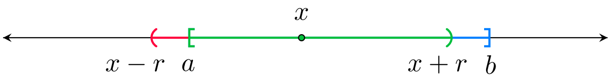
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $x - a < r \leq b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, x + r)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^{x+r} 1\, dt = \frac{1}{2} + \frac{x-a}{2r} < 1.$$

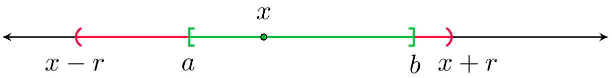


$$x - a < r \leq b - x$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$



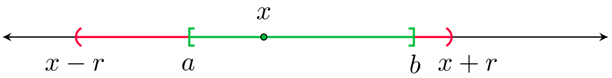
$$r > b - x$$

- Si $r > b - x$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = [a,b]$$

y resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2r}\int_a^b 1\,dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



$$r > b - x$$

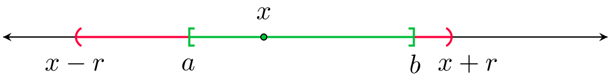
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > b - x$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = [a,b]$$

y resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2r}\int_a^b 1\,dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



$$r > b - x$$

Al tomar supremo sobre $r > 0$ en este caso obtenemos

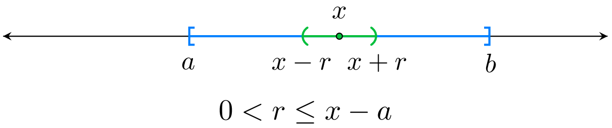
$$\boxed{\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = 1.}$$

Caso 2.3 $x = (a + b)/2$.

Caso 2.3 $x = (a+b)/2$.

- Si $0 < r \leq x - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = (x-r, x+r)$$



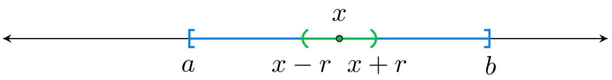
Caso 2.3 $x = (a+b)/2$.

- Si $0 < r \leq x - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = (x-r, x+r)$$

con lo cual

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1\, dt = \frac{2r}{2r} = 1.$$

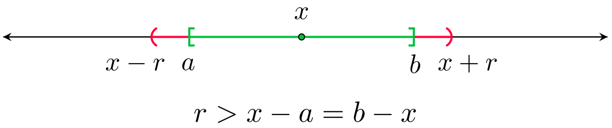


$$0 < r \leq x - a$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > x - a = b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$



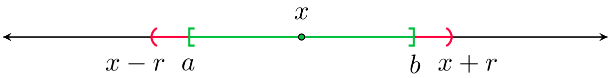
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > x - a = b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



$$r > x - a = b - x$$

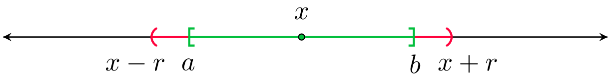
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > x - a = b - x$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



$$r > x - a = b - x$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta

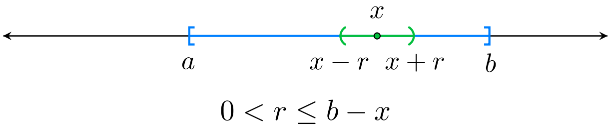
$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = 1.$$

Caso 2.4 $(a+b)/2 < x < b$.

Caso 2.4 $(a+b)/2 < x < b$.

- Si $0 < r \leq b - x$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = (x-r, x+r)$$



El operador maximal de Hardy-Littlewood

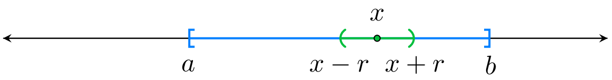
Caso 2.4 $(a+b)/2 < x < b$.

- Si $0 < r \leq b - x$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = (x-r, x+r)$$

con lo cual

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 1\, dt = \frac{2r}{2r} = 1.$$

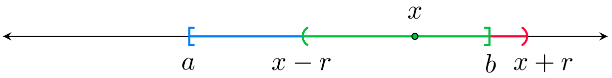


$$0 < r \leq b - x$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $b - x < r \leq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b]$$



$$b - x < r \leq x - a$$

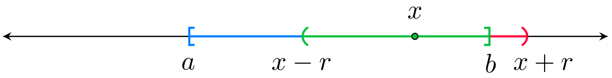
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $b - x < r \leq x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b]$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{b} 1\, dt = \frac{1}{2} + \frac{b-x}{2r} < 1.$$

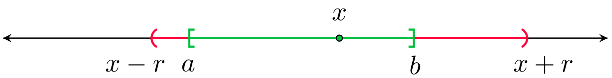


$$b - x < r \leq x - a$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$



$$r > x - a$$

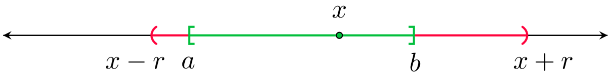
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = [a, b]$$

y resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



$$r > x - a$$

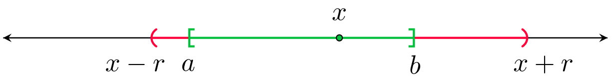
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r > x - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = [a,b]$$

y resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2r}\int_a^b 1\,dt = \frac{b-a}{2r} < 1.$$



$$r > x - a$$

Al tomar supremo sobre $r > 0$ en este caso obtenemos

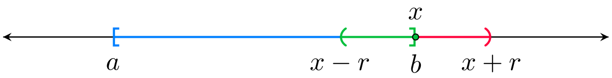
$$\boxed{\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t)|\,dt = 1.}$$

Caso 2.5 $x = b$.

Caso 2.5 $x = b$.

- Si $0 < r < b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b] = (b - r, b].$$



$0 < r < b - a$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

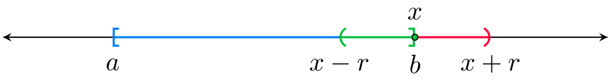
Caso 2.5 $x = b$.

- Si $0 < r < b - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = (x-r, b] = (b-r, b].$$

De esta forma

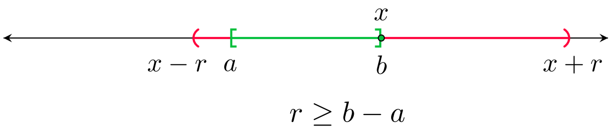
$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{b-r}^{b} 1\, dt = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$



$$0 < r < b - a$$

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} (a,b] & \text{si } r = b-a, \\ [a,b] & \text{si } r > b-a. \end{cases}$$



El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} (a,b] & \text{si } r = b-a, \\ [a,b] & \text{si } r > b-a. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r}.$$

$r \geq b - a$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq b - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \begin{cases} (a, b] & \text{si } r = b - a, \\ [a, b] & \text{si } r > b - a. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r}.$$

$$r \geq b - a$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta que

$$\boxed{\sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2}.}$$

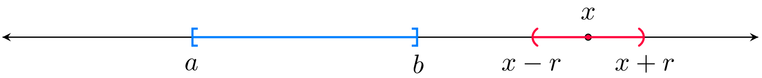
Caso 3 $x > b$. En este caso tenemos que $x - b > 0$.

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Caso 3 $x > b$. En este caso tenemos que $x - b > 0$.

- Si $0 < r \leq x - b$, entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \emptyset$$



$$0 < r \leq x - b$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

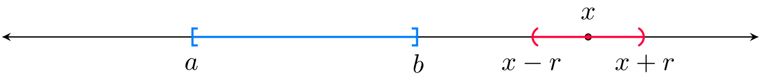
Caso 3 $x > b$. En este caso tenemos que $x - b > 0$.

- Si $0 < r \leq x - b$, entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = \emptyset$$

  y por lo tanto

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} 0\, dt = 0.$$

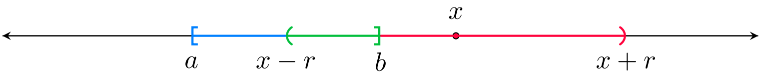


$$0 < r \leq x - b$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $x - b < r < x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b]$$



$$a - x < r < b - x$$

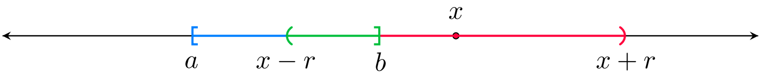
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $x - b < r < x - a$ entonces

$$(x - r, x + r) \cap [a, b] = (x - r, b]$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{b} 1\, dt = \frac{b - x + r}{2r} = \frac{1}{2} - \frac{x - b}{2r}.$$

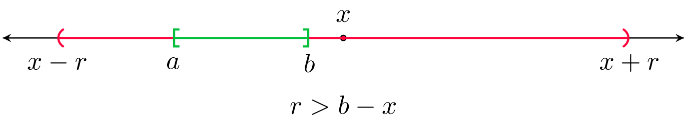


$$a - x < r < b - x$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq x - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} (a,b] & \text{si } r = x - a, \\ [a,b] & \text{si } r > x - a \end{cases}$$



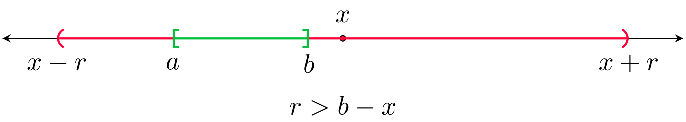
El operador maximal de Hardy-Littlewood

- Si $r \geq x - a$ entonces

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} (a,b] & \text{si } r = x-a, \\ [a,b] & \text{si } r > x-a \end{cases}$$

y en este caso simplemente resulta

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2r} \int_a^b 1\, dt = \frac{b-a}{2r}.$$



El operador maximal de Hardy-Littlewood

Para este tercer caso hemos obtenido entonces que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < r \leq x-b \\ \frac{1}{2}-\frac{x-b}{2r} & \text{si} \quad x-b \leq r \leq x-a \\ \frac{b-a}{2r} & \text{si} \quad r > x-a. \end{cases}$$

Para este tercer caso hemos obtenido entonces que

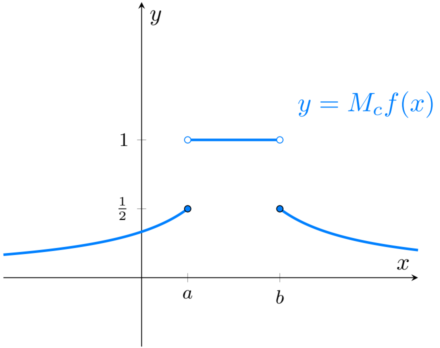
$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < r \leq x-b \\ \frac{1}{2} - \frac{x-b}{2r} & \text{si} \quad x-b \leq r \leq x-a \\ \frac{b-a}{2r} & \text{si} \quad r > x-a. \end{cases}$$

Tomando el supremo sobre $r > 0$ resulta

$$\boxed{\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|\,dt = \frac{b-a}{2(x-a)}.}$$

De esta manera resulta

$$M_c f(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)} & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } a < x < b, \\ \frac{b-a}{2(x-a)} & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$



Vamos a comprobar ahora la desigualdad (1).

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Vamos a comprobar ahora la desigualdad (1). Si $1 < p < \infty$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} (M_c f(x))^p \, dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{(b-a)^p}{2^p (b-x)^p} \, dx + \int_a^b 1^p \, dx + \int_b^{\infty} \frac{(b-a)^p}{2^p (x-a)^p} \, dx$$

Vamos a comprobar ahora la desigualdad (1). Si $1 < p < \infty$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} (M_c f(x))^p \, dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{(b-a)^p}{2^p (b-x)^p} \, dx + \int_a^b 1^p \, dx + \int_b^{\infty} \frac{(b-a)^p}{2^p (x-a)^p} \, dx$$

$$= \frac{b-a}{2^p(p-1)} + (b-a) + \frac{b-a}{2^p(p-1)}$$

$$= \frac{2^{p-1}(p-1)+1}{2^{p-1}(p-1)} (b-a)$$

$$= C_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx.$$

Vamos a comprobar ahora la desigualdad (1). Si $1 < p < \infty$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} (M_c f(x))^p \, dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{(b-a)^p}{2^p (b-x)^p} \, dx + \int_a^b 1^p \, dx + \int_b^{\infty} \frac{(b-a)^p}{2^p (x-a)^p} \, dx$$

$$= \frac{b-a}{2^p(p-1)} + (b-a) + \frac{b-a}{2^p(p-1)}$$

$$= \frac{2^{p-1}(p-1)+1}{2^{p-1}(p-1)} (b-a)$$

$$= C_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx.$$

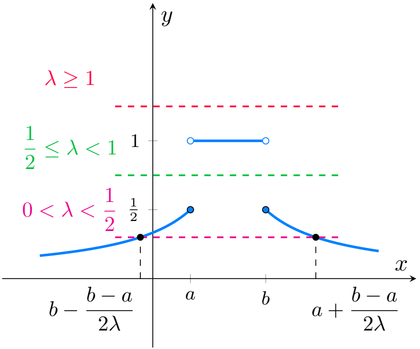
Entonces, hemos mostrado que

$$\|M_c f\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Ahora comprobemos la desigualdad (2).

Ahora comprobemos la desigualdad (2). Para $\lambda > 0$,

$$\{x \in \mathbb{R} : M_c f(x) > \lambda\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \lambda \geq 1, \\ (a,b) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1, \\ \left(b - \frac{b-a}{2\lambda}, a + \frac{b-a}{2\lambda}\right) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases}$$



El operador maximal de Hardy-Littlewood

Entonces

$$\lambda|\{x \in \mathbb{R} : M_c f(x) > \lambda\}| = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 1, \\ \lambda(b-a) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1, \\ (b-a)(1-\lambda) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces

$$\lambda|\{x \in \mathbb{R} : M_c f(x) > \lambda\}| = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 1, \\ \lambda(b-a) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1, \\ (b-a)(1-\lambda) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Y en consecuencia

$$\sup_{\lambda>0} \lambda|\{x \in \mathbb{R} : M_c f(x) > \lambda\}| = b - a = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$$

lo que nos indica que

$$[M_c f]_1 \leq \|f\|_1.$$

Definición de la clase A_p

Objetivo

Encontrar condiciones en la función peso w para que se cumplan las estimaciones siguientes.

Definición de la clase A_p

Objetivo

Encontrar condiciones en la función peso w para que se cumplan las estimaciones siguientes.

- Para $1 < p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \, w(x) \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \, dx$$

con $f \in L^p(w)$.

Definición de la clase A_p

Objetivo

Encontrar condiciones en la función peso w para que se cumplan las estimaciones siguientes.

- Para $1 < p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \, w(x) \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \, dx$$

  con $f \in L^p(w)$.

- Para $p = 1$

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) \, dx$$

  para todo $\lambda > 0$ y $f \in L^1(w)$.

Definición de la clase A_p

- En la década de los 70, Benjamin Muckenhoupt resolvió este problema, caracterizando los pesos como aquellos que pertenecen a la clase A_p que lleva su nombre.

Definición de la clase A_p

- En la década de los 70, Benjamin Muckenhoupt resolvió este problema, caracterizando los pesos como aquellos que pertenecen a la clase A_p que lleva su nombre.

- En lo que sigue nos ocuparemos de introducir estas clases y mostrar algunas de sus propiedades más importantes.

Definición de la clase A_p

Para motivar la definición, fijemos $1 < p < \infty$ y supongamos que w es un peso tal que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

vale para toda $f \in L^p(w)$.

Definición de la clase A_p

Para motivar la definición, fijemos $1 < p < \infty$ y supongamos que w es un peso tal que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

vale para toda $f \in L^p(w)$.

Fijemos una bola B de $\mathbb{R}^n$. Al aplicar esta desigualdad con $f\mathcal{X}_B$ obtenemos

$$w(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|\right)^p \leq \int_B Mf(x)^p w(x)\,dx \leq C\int_B |f(x)|^p w(x)\,dx$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|\right)^p \leq \frac{C}{w(B)}\int_B |f|^p w.$$

Definición de la clase A_p

Para motivar la definición, fijemos $1 < p < \infty$ y supongamos que w es un peso tal que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

vale para toda $f \in L^p(w)$.

Fijemos una bola B de $\mathbb{R}^n$. Al aplicar esta desigualdad con $f\mathcal{X}_B$ obtenemos

$$w(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|\right)^p \le \int_B Mf(x)^p w(x)\,dx \le C\int_B |f(x)|^p w(x)\,dx$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|\right)^p \le \frac{C}{w(B)}\int_B |f|^p w.$$

Si $\varepsilon > 0$ y $f = (w+\varepsilon)^{-p'/p}\mathcal{X}_B$, entonces

Definición de la clase A_p

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (w+\varepsilon)^{-p'/p}\right)^p\left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{w}{(w+\varepsilon)^{p'}}\right)^{-1} \leq C.$$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (w+\varepsilon)^{-p'/p}\right)^p\left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{w}{(w+\varepsilon)^{p'}}\right)^{-1} \leq C.$$

De aquí deducimos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (w+\varepsilon)^{1-p'}\right)^{p-1} \leq C.$$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (w+\varepsilon)^{-p'/p}\right)^p\left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{w}{(w+\varepsilon)^{p'}}\right)^{-1} \leq C.$$

De aquí deducimos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B (w+\varepsilon)^{1-p'}\right)^{p-1} \leq C.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ y usando el teorema de la convergencia monótona, finalmente obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1} \leq C.$$

Definición de la clase A_p

Definición (Clase de pesos A_p, $1 < p < \infty$)

Decimos que w pertenece a la clase A_p de Muckenhoupt si

$$[w]_{A_p} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty.$$

La constante $[w]_{A_p}$ recibe el nombre de constante característica A_p de w.

Definición de la clase A_p

Definición (Clase de pesos A_p, $1 < p < \infty$)

Decimos que w pertenece a la clase A_p de Muckenhoupt si

$$[w]_{A_p} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty.$$

La constante $[w]_{A_p}$ recibe el nombre de constante característica A_p de w.

Esta condición puede reescribirse en término de normas p: en efecto, decimos que $w \in A_p$ si existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$|B|^{-1} \|w^{1/p} \mathcal{X}_B\|_p \|w^{-1/p} \mathcal{X}_B\|_{p'} \leq C$$

vale para toda bola B de $\mathbb{R}^n$. En este caso tenemos $[w]_{A_p} \leq C^p$.

Definición de la clase A_p

Consideremos ahora el caso $p = 1$. Supongamos que w es un peso que verifica la desigualdad

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx$$

para toda $f \in L^1(w)$ y todo $\lambda > 0$.

Definición de la clase A_p

Consideremos ahora el caso $p = 1$. Supongamos que w es un peso que verifica la desigualdad

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx$$

para toda $f \in L^1(w)$ y todo $\lambda > 0$.

Si B es una bola y $0 < \lambda < |B|^{-1} \int_B |f|$ entonces

$$w(B) \leq w(\{x \in B : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w.$$

Definición de la clase A_p

Consideremos ahora el caso $p = 1$. Supongamos que w es un peso que verifica la desigualdad

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)\, dx$$

para toda $f \in L^1(w)$ y todo $\lambda > 0$.

Si B es una bola y $0 < \lambda < |B|^{-1} \int_B |f|$ entonces

$$w(B) \leq w(\{x \in B : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w.$$

Como C no depende de λ, haciendo $\lambda \to |B|^{-1} \int_B |f|$ obtenemos

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq \frac{C}{w(B)} \int_{\mathbb{R}^n} |f| w \tag{3}$$

para toda bola B y toda $f \in L^1(w)$.

Definición de la clase A_p

Si $a > \text{ínf}_B\, w$ y $S_a = \{x \in B : w(x) < a\}$, entonces $|S_a| > 0$ por definición.

Definición de la clase A_p

Si $a > \operatorname{ínf}_B w$ y $S_a = \{x \in B : w(x) < a\}$, entonces $|S_a| > 0$ por definición. Considerando $f = \mathcal{X}_{S_a}$ en (3) resulta

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C\frac{w(S_a)}{|S_a|} < Ca.$$

Definición de la clase A_p

Si $a > \operatorname{ínf}_B w$ y $S_a = \{x \in B : w(x) < a\}$, entonces $|S_a| > 0$ por definición. Considerando $f = \mathcal{X}_{S_a}$ en (3) resulta

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \frac{w(S_a)}{|S_a|} < Ca.$$

Haciendo $a \to \operatorname{ínf}_B w$ concluimos que

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \operatorname*{ínf}_B w.$$

Definición de la clase A_p

Si $a > \operatorname{ínf}_B w$ y $S_a = \{x \in B : w(x) < a\}$, entonces $|S_a| > 0$ por definición. Considerando $f = \mathcal{X}_{S_a}$ en (3) resulta

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \frac{w(S_a)}{|S_a|} < Ca.$$

Haciendo $a \to \operatorname{ínf}_B w$ concluimos que

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \operatorname*{ínf}_B w.$$

Como $\operatorname{ínf}_B w = \left(\sup_B w^{-1}\right)^{-1}$ también podemos escribir

$$\frac{w(B)}{|B|} \left(\sup_B w^{-1}\right) \leq C.$$

Definición (Clase de pesos A_1)

Decimos que w pertenece a la clase A_1 de Muckenhoupt si

$$[w]_{A_1} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\sup_B w^{-1} \right) < \infty.$$

El número $[w]_{A_1}$ se llama constante característica A_1 de w.

Definición de la clase A_p

Definición (Clase de pesos A_1)

Decimos que w pertenece a la clase A_1 de Muckenhoupt si

$$[w]_{A_1} = \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\sup_B w^{-1} \right) < \infty.$$

El número $[w]_{A_1}$ se llama constante característica A_1 de w.

Al igual que lo observado para la clase A_p, podemos definir la condición A_1 como el conjunto de pesos w para los que existe $C > 0$ tal que la desigualdad

$$|B|^{-1} \|w \mathcal{X}_B\|_1 \|w^{-1} \mathcal{X}_B\|_\infty \leq C$$

vale para toda bola B. En este caso tenemos $[w]_{A_1} \leq C$.

Propiedades elementales

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subseteq A_q$.

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subseteq A_q$.
2. Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subseteq A_q$.
2. Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.
3. Sea $1 < p < \infty$. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}$ y $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$.

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subseteq A_q$.
2. Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.
3. Sea $1 < p < \infty$. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}$ y $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$.
4. Si u y v están en la clase A_1, entonces $w = uv^{1-p}$ está en la clase A_p, para todo $1 < p < \infty$.

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subseteq A_q$.
2. Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.
3. Sea $1 < p < \infty$. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}$ y $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$.
4. Si u y v están en la clase A_1, entonces $w = uv^{1-p}$ está en la clase A_p, para todo $1 < p < \infty$.
5. Si $w \in A_p$, entonces la medida $d\mu(x) = w(x)\,dx$ es duplicante: para cada $\lambda > 1$ y todo cubo B se cumple que

$$w(\lambda B) \leq [w]_{A_p} \lambda^{np} w(B).$$

Proposición (Propiedades de la clase A_p)

Sea w un peso. Entonces valen las siguientes afirmaciones:

1. Si $1 \leq p < q$ entonces $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$. Es decir, $A_p \subseteq A_q$.
2. Si $p \geq 1$ y $w \in A_p$, entonces $[w]_{A_p} \geq 1$.
3. Sea $1 < p < \infty$. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}$ y $[\sigma]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$.
4. Si u y v están en la clase A_1, entonces $w = uv^{1-p}$ está en la clase A_p, para todo $1 < p < \infty$.
5. Si $w \in A_p$, entonces la medida $d\mu(x) = w(x)\, dx$ es duplicante: para cada $\lambda > 1$ y todo cubo B se cumple que
$$w(\lambda B) \leq [w]_{A_p} \lambda^{np} w(B).$$
6. $w \in A_1$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que $Mw(x) \leq Cw(x)$ para casi todo x.

Demostración.

1. Como $-1 = (1 - q')(q - 1)$ para cualquier $q > 1$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\sup_B w^{-1}\right) \geq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1}.$$

Demostración.

1. Como $-1 = (1-q')(q-1)$ para cualquier $q > 1$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\sup_B w^{-1}\right) \geq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1}.$$

Si $w \in A_1$, entonces

$$\begin{aligned}
\infty > [w]_{A_1} &= \sup_{B\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\sup_B w^{-1}\right) \\
&\geq \sup_{B\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1} \\
&= [w]_{A_q},
\end{aligned}$$

con lo cual $A_1 \subseteq A_q$ y $[w]_{A_1} \geq [w]_{A_q}$.

Demostración.

1. Si $1 < p < q$, entonces por la desigualdad de Jensen es claro que para toda bola B

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1}.$$

Demostración.

1. Si $1 < p < q$, entonces por la desigualdad de Jensen es claro que para toda bola B

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1}.$$

Luego, si $w \in A_p$

$$\begin{aligned}\infty > [w]_{A_p} &= \sup_{B\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1} \\ &\geq \sup_{B\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1} \\ &= [w]_{A_q},\end{aligned}$$

es decir, $w \in A_q$ y $[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}$.

Demostración.

2. Si $1 < p < \infty$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B w^{1/p}w^{-1/p} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{1/p'}.$$

Demostración.

2. Si $1 < p < \infty$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B w^{1/p} w^{-1/p} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{1/p} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{1/p'}.$$

Elevando ambos miembros al exponente p obtenemos

$$1 \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right) \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1},$$

de donde se sigue la afirmación.

Demostración.

2. Si $1 < p < \infty$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B w^{1/p} w^{-1/p} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{1/p} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{1/p'} .$$

Elevando ambos miembros al exponente p obtenemos

$$1 \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right) \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1} ,$$

de donde se sigue la afirmación.
Si $p = 1$, obtenemos la estimación al observar que

$$1 = \frac{1}{|B|}\int_B w w^{-1} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right) \left(\sup_B w^{-1}\right) .$$

Demostración.

3. Notemos que el producto

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \sigma\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \sigma^{1-p}\right)^{p'-1}$$

puede reescribirse como

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{p'-1}$$

Demostración.

3 Notemos que el producto

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \sigma\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \sigma^{1-p}\right)^{p'-1}$$

puede reescribirse como

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{p'-1}$$

o también

$$\left[\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\right]^{p'-1},$$

ya que $(1-p)(1-p')=1$. De aquí deducimos también que $[\sigma]_{A_{p'}}=[w]_{A_p}^{p'-1}$.

Demostración.

4. Si u y v están en A_1, entonces para cualquier bola B

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B uv^{1-p}\right)&\left(\frac{1}{|B|}\int_B (uv^{1-p})^{1-p'}\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B uv^{1-p}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B u^{1-p'}v\right)^{p-1}\\ &\leq \left(\inf_B v\right)^{1-p}\frac{u(B)}{|B|}\left(\inf_B u\right)^{-1}\left(\frac{v(B)}{|B|}\right)^{p-1}\\ &\leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1},\end{aligned}$$

ya que $u \geq \inf_B u$ y $v \geq \inf_B v$ en casi todo punto de B.

Propiedades elementales

Demostración.

4. Si u y v están en A_1, entonces para cualquier bola B

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B uv^{1-p}\right)&\left(\frac{1}{|B|}\int_B (uv^{1-p})^{1-p'}\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B uv^{1-p}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B u^{1-p'}v\right)^{p-1}\\ &\leq \left(\inf_B v\right)^{1-p}\frac{u(B)}{|B|}\left(\inf_B u\right)^{-1}\left(\frac{v(B)}{|B|}\right)^{p-1}\\ &\leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1},\end{aligned}$$

ya que $u \geq \inf_B u$ y $v \geq \inf_B v$ en casi todo punto de B.

Tomando supremo sobre todas las bolas de $\mathbb{R}^n$, obtenemos que $uv^{1-p} \in A_p$ y además $[uv^{1-p}]_{A_p} \leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1}$.

Demostración.

4. Si u y v están en A_1, entonces para cualquier bola B

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B|}\int_B uv^{1-p}\right)&\left(\frac{1}{|B|}\int_B (uv^{1-p})^{1-p'}\right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{1}{|B|}\int_B uv^{1-p}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B u^{1-p'}v\right)^{p-1} \\
&\leq \left(\inf_B v\right)^{1-p}\frac{u(B)}{|B|}\left(\inf_B u\right)^{-1}\left(\frac{v(B)}{|B|}\right)^{p-1} \\
&\leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1},
\end{aligned}
$$

ya que $u \geq \operatorname{ínf}_B u$ y $v \geq \operatorname{ínf}_B v$ en casi todo punto de B.

Tomando supremo sobre todas las bolas de $\mathbb{R}^n$, obtenemos que $uv^{1-p} \in A_p$ y además $[uv^{1-p}]_{A_p} \leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1}$.

Demostración.

5. Si $p = 1$, fijados $\lambda > 1$ y una bola B obtenemos

$$\frac{w(\lambda B)}{|\lambda B|} \leq [w]_{A_1} \operatorname*{ínf}_{\lambda B} w \leq [w]_{A_1} \operatorname*{ínf}_{B} w \leq [w]_{A_1} \frac{w(B)}{|B|},$$

de donde deducimos que

$$w(\lambda B) \leq [w]_{A_1} \lambda^n w(B).$$

Demostración.

5. Si $p=1$, fijados $\lambda>1$ y una bola B obtenemos

$$\frac{w(\lambda B)}{|\lambda B|} \leq [w]_{A_1} \inf_{\lambda B} w \leq [w]_{A_1} \inf_{B} w \leq [w]_{A_1} \frac{w(B)}{|B|},$$

de donde deducimos que

$$w(\lambda B) \leq [w]_{A_1} \lambda^n w(B).$$

Si $1<p<\infty$ y $w \in A_p$, utilizando (2) tenemos que

$$\begin{aligned} w(\lambda B) &= |\lambda B|^p \frac{w(\lambda B)}{|\lambda B|} \left(\frac{w^{1-p'}(\lambda B)}{|\lambda B|}\right)^{p-1} \left(w^{1-p'}(\lambda B)\right)^{1-p} \\ &\leq [w]_{A_p} \lambda^{np} |B|^p \left(w^{1-p'}(B)\right)^{1-p} \\ &\leq [w]_{A_p} \lambda^{np} w(B). \end{aligned}$$

Demostración.

6 Si $w \in A_1$, entonces la desigualdad

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq [w]_{A_1} w(x) \tag{4}$$

vale para toda bola B y casi todo x en B.

Demostración.

6. Si $w \in A_1$, entonces la desigualdad

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq [w]_{A_1} w(x) \tag{4}$$

vale para toda bola B y casi todo x en B.
Fijado x tal que $Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)$, existe una bola B_x con radio racional que contiene a x y tal que

$$\frac{w(B_x)}{|B_x|} > [w]_{A_1} w(x).$$

Demostración.

6. En virtud de (4), x debe estar en un subconjunto de B_x de medida nula. Luego

$$\{x : Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j,$$

siendo N_j conjuntos medibles de medida cero.

Por lo tanto, $Mw(x) \leq [w]_{A_1} w(x)$ en casi todo punto x.

Demostración.

6 En virtud de (4), x debe estar en un subconjunto de B_x de medida nula. Luego

$$\{x : Mw(x) > [w]_{A_1} w(x)\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j,$$

siendo N_j conjuntos medibles de medida cero.

Por lo tanto, $Mw(x) \leq [w]_{A_1} w(x)$ en casi todo punto x.

Recíprocamente, si $Mw(x) \leq Cw(x)$ en casi todo punto x, entonces vale (4) con $[w]_{A_1}$ reemplazada por C y para casi todo punto de B, que es equivalente a que

$$\frac{w(B)}{|B|} \leq C \inf_B w. \qquad \square$$

Proposición (Caracterización de potencias en A_p)

Sean $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ y $w(x) = |x|^a$. Entonces

$$w \in A_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad -n < a < n(p-1)$$

y también

$$w \in A_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -n < a \leq 0.$$

Propiedades elementales

Proposición (Caracterización de potencias en A_p)

Sean $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ y $w(x) = |x|^a$. Entonces

$$w \in A_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad -n < a < n(p-1)$$

y también

$$w \in A_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -n < a \leq 0.$$

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Sea $-n < a < n(p-1)$. Dividimos las bolas de $\mathbb{R}^n$ en dos familias
$$\mathcal{B}_1 = \{B = B(x_B, r) : |x_B| \leq 3r\}$$
y
$$\mathcal{B}_2 = \{B = B(x_B, r) : |x_B| > 3r\}.$$

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si $B \in \mathcal{B}_1$, entonces $B \subseteq B_0 = B(0, 4r)$.

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si $B \in \mathcal{B}_1$, entonces $B \subseteq B_0 = B(0, 4r)$. Utilizando coordenadas polares tenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1}$$

se acota por

$$\frac{C}{r^{np}}\left(\int_0^{4r} \rho^{a+n-1}\,d\rho\right)\left(\int_0^{4r} \rho^{a(1-p')+n-1}\,d\rho\right)^{p-1},$$

que a su vez está mayorado por una constante C_1.

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$ para todo $x \in B$.

Propiedades elementales

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$ para todo $x \in B$. En este caso directamente obtenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1}$$

se acota por

$$C|x_B|^a|x_B|^{a(1-p')(p-1)} = C_2.$$

Propiedades elementales

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si $B \in \mathcal{B}_2$, entonces $|x| \approx |x_B|$ para todo $x \in B$. En este caso directamente obtenemos que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1}$$

se acota por

$$C|x_B|^a|x_B|^{a(1-p')(p-1)} = C_2.$$

- Si $C = \max\{C_1, C_2\}$ entonces

$$\sup_{B\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq C,$$

lo que permite concluir que $w(x) = |x|^a$ está en A_p.

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si ahora suponemos $w \in A_p$, entonces para toda bola B

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq [w]_{A_p}.$$

Demostración (caso $1 < p < \infty$).

- Si ahora suponemos $w \in A_p$, entonces para toda bola B

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{a(1-p')}\,dx\right)^{p-1} \leq [w]_{A_p}.$$

- Esto implica que cada factor del lado izquierdo es finito, y entonces

$$a > -n \quad \text{y} \quad a(1-p') > -n$$

o, equivalentemente

$$-n < a < n(p-1).$$

Propiedades elementales

Demostración (caso $p = 1$).

- Sea $-n < a \leq 0$ y consideramos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ como antes.

Demostración (caso $p = 1$).

- Sea $-n < a \leq 0$ y consideramos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ como antes.
- Si $B \in \mathcal{B}_1$, entonces

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq \frac{C}{|B_0|}\int_{B_0} |x|^a\,dx \leq Cr^a = C\inf_{B_0}|x|^a \\ \leq C_1 \inf_B |x|^a,$$

pues $w(x) = |x|^a$ es radialmente decreciente y $B \subseteq B_0$.

Demostración (caso $p = 1$).

- Sea $-n < a \leq 0$ y consideramos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ como antes.
- Si $B \in \mathcal{B}_1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq \frac{C}{|B_0|}\int_{B_0} |x|^a\,dx \leq Cr^a &= C\inf_{B_0} |x|^a \\ &\leq C_1 \inf_B |x|^a,\end{aligned}$$

  pues $w(x) = |x|^a$ es radialmente decreciente y $B \subseteq B_0$.
- Si $B \in \mathcal{B}_2$ entonces $|x| \approx |x_B|$, con lo cual

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq C|x_B|^a = C_2 \inf_B |x|^a.$$

Demostración (caso $p = 1$).

- Si $C = \max\{C_1, C_2\}$, entonces

$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a \, dx \leq C \inf_B |x|^a$$

para toda bola B, es decir, $w \in A_1$.

Demostración (caso $p = 1$).

- Si $C = \max\{C_1, C_2\}$, entonces

$$\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a \, dx \leq C \inf_B |x|^a$$

para toda bola B, es decir, $w \in A_1$.

- Si ahora suponemos que $w \in A_1$, la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |x|^a \, dx \right) \left(\sup_B |x|^{-a} \right) \leq [w]_{A_1}$$

vale para toda bola B y, en consecuencia, cada factor del lado izquierdo es finito.

Demostración (caso $p = 1$).

- Si $C = \max\{C_1, C_2\}$, entonces
$$\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx \leq C \inf_B |x|^a$$
para toda bola B, es decir, $w \in A_1$.
- Si ahora suponemos que $w \in A_1$, la desigualdad
$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a\,dx\right)\left(\sup_B |x|^{-a}\right) \leq [w]_{A_1}$$
vale para toda bola B y, en consecuencia, cada factor del lado izquierdo es finito.
- Como $\int_B |x|^a\,dx < \infty$, debemos tener $a > -n$.
- Dado que $\sup_B |x|^{-a} < \infty$, debe ser $a \leq 0$. $\square$

Propiedades adicionales

Además de las propiedades vistas hasta ahora, podemos mencionar otras muy importantes.

- Desigualdad de Hölder al revés. Si $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces existen $s > 1$ y $C > 0$ tales que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^s \right)^{1/s} \leq \frac{C}{|B|} \int_B w$$

  es válida para cualquier bola B de $\mathbb{R}^n$. La constante C depende únicamente de la dimensión y de $[w]_{A_p}$.

Propiedades adicionales

Además de las propiedades vistas hasta ahora, podemos mencionar otras muy importantes.

- Desigualdad de Hölder al revés. Si $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces existen $s > 1$ y $C > 0$ tales que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^s \right)^{1/s} \leq \frac{C}{|B|} \int_B w$$

  es válida para cualquier bola B de $\mathbb{R}^n$. La constante C depende únicamente de la dimensión y de $[w]_{A_p}$.
- Apertura. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces existe $1 < q < p$ tal que $w \in A_q$.

Propiedades adicionales

Además de las propiedades vistas hasta ahora, podemos mencionar otras muy importantes.

- Desigualdad de Hölder al revés. Si $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces existen $s > 1$ y $C > 0$ tales que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^s \right)^{1/s} \leq \frac{C}{|B|} \int_B w$$

  es válida para cualquier bola B de $\mathbb{R}^n$. La constante C depende únicamente de la dimensión y de $[w]_{A_p}$.
- Apertura. Si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces existe $1 < q < p$ tal que $w \in A_q$.
- Factorización. Para $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p$ si y sólo si existen pesos u y v en A_1 tales que

$$w = uv^{1-p} \qquad \text{(teorema de factorización de Jones)}$$